



Facultad de Ciencias

# **OPTIMIZACIÓN MULTICRITERIO Y LA PLANIFICACIÓN DE INVERSIONES**

*MULTICRITERIA PROGRAMMING AND  
PORTFOLIO OPTIMIZATION*

Trabajo de Fin de Grado para acceder al

## **GRADO EN MATEMÁTICAS**

Autor: Juan Campo Quinzanos

Directora: Cecilia Pola Méndez

Febrero 2020



## Resumen

La optimización multicriterio surge cuando se desea optimizar más de una función objetivo a la vez. Esto ocurre, por ejemplo, a la hora de planificar inversiones donde se quiere obtener el mayor rendimiento posible, asumiendo el menor riesgo. Sin embargo, estos dos objetivos se contraponen, pues maximizar el rendimiento suele llevar implícito un aumento del riesgo de la inversión. En este trabajo proponemos una doble vertiente: teórica y práctica. En cuanto a la teórica, definiremos el problema de optimización multicriterio y presentaremos algunos resultados de existencia de solución y las condiciones de optimalidad para ese problema, siendo un concepto clave la solución de Pareto. Refiriéndonos ahora a la práctica, motivados por el modelo mono-objetivo para carteras de inversión de Harry Markowitz, el problema de Media-Varianza [7], consideraremos un modelo multicriterio. Por último, se presentarán algunos resultados obtenidos con Matlab para tres bases de datos, empleando la técnica de la ventana deslizante para la última de ellas.

**Palabras claves:** optimización multicriterio, optimalidad de Pareto, carteras de inversión, optimización Media-Varianza.

## Abstract

Multicriteria optimization is a process whereby we wish to optimise more than one objective function simultaneously. This occurs, for example, when planning investments whereby we want to achieve the highest level of return, for each unit of risk. Nevertheless, these two objectives are opposite because maximizing the return usually implies an increase of the investment's risk. In this paper, we propose a two strand approach: theory and practise. Beginning with the theoretical strand, we define the multicriteria optimization problem and present the optimality conditions for that problem, including the key Pareto-solution concept. Regarding now the practical strand, motivated by the mono-objective optimization model for portfolio investments of Harry Markowitz, the Mean-Variance problem [7], we consider a multicriteria model. Finally, we show some results obtained by Matlab for three databases, using the sliding window technique for the last one.

**Key words:** Multicriteria optimization, Pareto optimality, portfolio investment, Mean-Variance optimization.



## **AGRADECIMIENTOS**

En primer lugar, me gustaría dar las gracias a la directora de mi trabajo, Cecilia, pues ha dedicado gran parte de su tiempo a ayudarme. Quiero también agradecer a mi familia por haberme mostrado siempre el apoyo necesario durante todo el Grado. Por último, dar las gracias a mi buen amigo irlandés, Bernard, pues desde el primer momento no ha dudado en ayudarme con las nociones económicas.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>9</b>
<b>2. Preliminares</b>	<b>11</b>
2.1. Una introducción a la optimización multicriterio . . . . .	12
2.2. Planificación de inversiones . . . . .	14
2.2.1. Rentabilidad y riesgo de una cartera de inversión . . . . .	14
2.2.2. Modelo de Markowitz . . . . .	16
<b>3. Resultados de existencia para la optimalidad de Pareto</b>	<b>19</b>
<b>4. Condiciones de optimalidad multicriterio</b>	<b>21</b>
4.1. Condiciones de primer orden . . . . .	21
4.2. Condiciones de segundo orden . . . . .	24
<b>5. Resultados numéricos</b>	<b>25</b>
5.1. Modelos de optimización . . . . .	25
5.2. Datos para los experimentos . . . . .	25
5.3. Trabajando con software mono-objetivo . . . . .	27
5.4. Eligiendo el software multicriterio . . . . .	27
5.5. Experimentación con datos <sup>3</sup> . . . . .	29
5.5.1. Inestabilidad de los modelos . . . . .	31
5.5.2. Evaluando las estimaciones . . . . .	41
5.5.3. Experimentos con la solución trivial . . . . .	42
<b>6. La dificultad del problema de inversión en carteras</b>	<b>45</b>
<b>7. Anexo</b>	<b>47</b>
7.1. Glosario . . . . .	48





# Capítulo 1

## Introducción

En este trabajo se quiere poner en práctica los conocimientos adquiridos tras haber cursado las diferentes asignaturas del Grado en Matemáticas, especialmente los adquiridos del estudio de la asignatura Optimización I, y a la vez relacionar dichos conocimientos con los aprendidos durante el curso de la “Mención en Economía, Empresa y Mercados financieros” perteneciente al cuarto curso del Grado en Matemáticas. En definitiva, se quiere mostrar alguna de las relaciones entre la Economía y las Matemáticas (que no son pocas), justificando así el motivo del ofrecimiento a cursar las asignaturas de dicha mención (que pertenecen al Grado en Administración y Dirección de Empresas).

Tras haber acabado los estudios de dicha mención me pareció bastante interesante la teoría de Harry Markowitz que conocí en la asignatura de Análisis y Evaluación de Inversiones. Ligado al estudio de esta teoría aprendimos el concepto de frontera de Pareto, aunque de un modo más visual que teórico. En este trabajo, sin embargo, sí pretendemos estudiarlo desde un punto de vista teórico y relacionarlo con otros conocimientos matemáticos que hemos recibido en otras asignaturas del Grado como la Optimización I.

El desarrollo de la teoría de optimización de carteras de inversión es de interés en los mercados financieros para mejorar las decisiones a tomar a la hora de realizar inversiones. En este marco se produjo una revolución en 1952 cuando Markowitz publicó su artículo sobre la elección de las carteras de inversión [7]. En este trabajo se explica cómo debe un inversor repartir su capital entre los distintos activos financieros en los que está interesado invertir. La importancia del concepto de la diversificación se basa en que el riesgo de una cartera de inversión depende tanto de la correlación entre los activos que forman la cartera como del riesgo de cada activo por separado.

Nuestro interés en esta teoría como matemáticos llega a la vista de la repercusión del trabajo de Markowitz [6]. Markowitz formula un problema de optimización para dar respuesta al proceso de cómo formar carteras de inversión eficientes. El problema, conocido como Media-Varianza, calcula, para un cierto rendimiento requerido, la mejor cartera de inversión posible, esta es, la que ofrece el menor riesgo posible para ese rendimiento requerido. El resto de las carteras que ofrezcan ese mismo nivel de rendimiento serán consideradas como carteras de inversión ineficientes, pues tendrán un nivel de riesgo mayor. Este es un problema de optimización mono-objetivo y por tanto,

antes de empezar este trabajo ya conocíamos sus propiedades gracias a la asignatura de Optimización I. Pero en realidad hay dos objetivos a alcanzar: minimizar el riesgo y maximizar el rendimiento. Es aquí donde nos aparece la optimización multicriterio.

La optimización multicriterio o multiobjetivo es aquella en la que se minimizan varias funciones a la vez. En la mayoría de los casos esas funciones se encontrarán en oposición y por tanto el concepto de solución clásico no podrá trasladarse directamente al de solución óptima en la optimización multiobjetivo. Esto es lo que ocurre al plantear el problema de optimización multiobjetivo en carteras de inversión donde los objetivos serán minimizar el riesgo y maximizar el rendimiento simultáneamente. El conjunto de las soluciones formarán la frontera de Pareto (término que ya dijimos que conocíamos).

Comenzaremos esta memoria con un capítulo dividido en dos partes donde presentaremos la optimización multicriterio y formularemos el rendimiento y riesgo de una cartera de inversión. En los dos siguientes capítulos trataremos algunos resultados de existencia para el problema multiobjetivo y presentaremos las condiciones de optimalidad. En el quinto capítulo se exponen algunos resultados numéricos. Trabajaremos con varios modelos de optimización con distintas bases de datos (dos de ellas de la librería OR [1] y una de Bloomberg Finance L. P). Con esta última hemos tenido que enfrentarnos a la dificultad de estimar el rendimiento y el riesgo para obtener los datos de los problemas de optimización. También hemos utilizado la técnica de la ventana deslizante para resolver los problemas. Para la resolución numérica, hemos considerado varios códigos, decantándonos por “estimateFrontier” (perteneciente a la Financial Toolbox de Matlab). A esta cuestión se le dedicará un apartado especial indicando el motivo de dicha elección. Además, en el penúltimo capítulo se presenta la principal conclusión a la que hemos llegado después de la realización de este trabajo. Finalizamos la memoria con un anexo donde se enuncian algunos resultados de optimización mono-objetivo y se definen algunos términos matemáticos y económicos.

## Capítulo 2

# Preliminares

Este capítulo introduce conceptos básicos de la optimización multiobjetivo y la notación que se usará a continuación.

Antes de nada, sería conveniente introducir el problema de optimización mono-objetivo con su respectiva formulación matemática.

Un **problema de optimización mono-objetivo**, como bien estudiamos en la asignatura de Optimización I durante nuestro tercer curso del Grado en Matemáticas, está formulado a partir de un conjunto de variables que deben cumplir una serie de condiciones, llamadas restricciones del problema, y también de una función (función objetivo) que depende de las variables. Será esta función la que habrá que minimizar o maximizar. En la vida real encontramos muchos casos en los se aplica este campo de las matemáticas. Por ejemplo, las empresas automovilísticas intentan siempre minimizar el consumo de los coches o maximizar su confort.

Matemáticamente, el problema de optimización mono-objetivo puede ser formulado de la siguiente manera:

Dada una función objetivo  $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  y  $k$  funciones  $g_j : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  que definen un conjunto de restricciones

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, k\}, \quad (2.1)$$

el problema de optimización mono-objetivo consiste en

$$\text{hallar } \bar{x} \in X \text{ tal que } f(\bar{x}) \leq f(x), \forall x \in X.$$

Abreviadamente se formula:

$$(P_0) \begin{cases} \text{Min} & f(x) \\ \text{sujeeto a} & x \in X. \end{cases}$$

## 2.1. Una introducción a la optimización multicriterio

Un **problema de optimización multicriterio** es un problema de optimización que involucra varias funciones objetivo (estas son las funciones que se quieren minimizar o maximizar). Un problema de este tipo con  $n$  variables,  $m$  objetivos,  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , y  $k$  restricciones puede ser formulado como se muestra a continuación:

$$(P) \begin{cases} \text{Min} & (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)) \\ \text{sujeto a} & x \in X. \end{cases}$$

Llamaremos **vector de decisión** a todo elemento del conjunto  $X$ . En este problema se quiere minimizar todas las funciones objetivos a la vez. Si por algún casual estos objetivos no estuviesen en conflicto, es decir, que el minimizar uno de los objetivos no hiciese aumentar otro, podríamos encontrar una solución que minimizase a todas las funciones. En este trabajo ignoraremos este caso trivial. Por tanto, asumiremos problemas en los que las funciones objetivo estén en conflicto (como por ejemplo ocurriría si quisiésemos comprar un coche cuyo consumo fuese mínimo y su potencia máxima) lo que nos llevará a redefinir el conjunto de solución óptima (ver por ejemplo [8]).

**Definición 2.1.1** (Solución Pareto-óptima). *Un vector de decisión  $\bar{x} \in X$  es solución Pareto-óptima, o es óptima en el sentido de Pareto, del problema (P) si, y solo si,  $\nexists x \in X$  tal que*

$$f_i(x) \leq f_i(\bar{x}), \quad \forall i = 1, \dots, m$$

y

$$f_{i_0}(x) < f_{i_0}(\bar{x}) \text{ para al menos un índice } i_0 \in \{1, \dots, m\}.$$

En otras palabras, un elemento  $\bar{x} \in X$  es una solución Pareto-óptima si se trata de un vector de decisión que no se puede mejorar: disminuir uno de sus valores de las funciones objetivo sin empeorar al menos otro.

Veamos un ejemplo práctico:

Sea el problema de optimización multiobjetivo siguiente conocido como el problema de Schaffer:

$$(P_s) \begin{cases} \text{Min} & (\tilde{f}_1(x), \tilde{f}_2(x)) \\ \text{sujeto a} & \\ & -10 < x < 10 \end{cases}$$

donde  $\tilde{f}_1(x) = x^2$  y  $\tilde{f}_2(x) = (x - 2)^2$ .

Es fácil darse cuenta que  $x = 0$  y  $x = 2$  minimizan respectivamente a  $\tilde{f}_1(x)$  y  $\tilde{f}_2(x)$  (dándose la unicidad de solución en ambos casos). El punto  $x = 3$  no es solución óptima ya que el valor de ambas funciones objetivo puede ser reducido tomando por ejemplo  $x = 2$ . Por otro lado,  $x = 1$  es una solución óptima en el sentido de Pareto porque, aunque ninguna de las funciones alcance su mínimo en ese punto, se tiene que  $\tilde{f}_1(1) < \tilde{f}_1(2)$  y que  $\tilde{f}_2(1) < \tilde{f}_2(0)$ .

En la imagen siguiente vemos los valores que toman las dos funciones a minimizar

y en verde los valores correspondientes a  $x \in [0, 2]$ . Este intervalo determina las soluciones de Pareto del ejemplo, puesto que no podemos minimizar una de las funciones sin aumentar el valor de la otra.

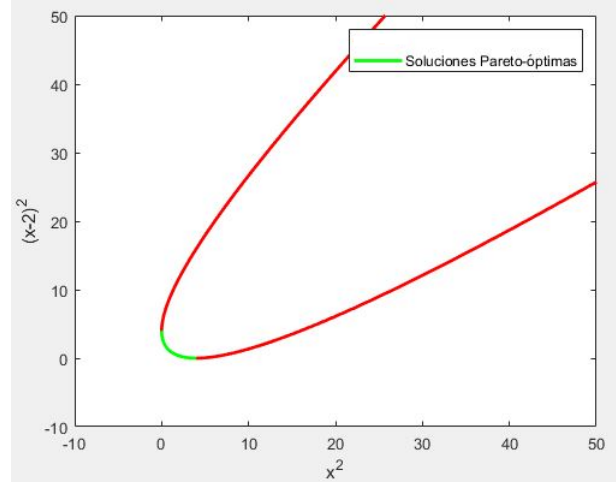


Figura 2.1: Soluciones Pareto-óptimas.

Para cualquier valor de  $x \notin [0, 2]$  siempre podemos encontrar valores inferiores tanto de  $\tilde{f}_1$  como de  $\tilde{f}_2$  por lo que estas no serán consideradas óptimas.

La Definición 2.1.1 introduce el concepto de solución Pareto-óptima global. Otro término importante es el de solución Pareto-óptima local.

**Definición 2.1.2** (Solución Pareto-óptima local). *Sea  $x \in X$ . Un vector de decisión  $\bar{x} \in X$  es una solución Pareto-óptima local del problema  $(P)$  si existe  $\delta > 0$  tal que  $\bar{x}$  es solución Pareto-óptima (global) en  $X \cap B(x, \delta)$ .*

Al igual que en la optimización mono-objetivo, la hipótesis de convexidad nos asegura la globalidad de las soluciones locales, como vemos en el siguiente enunciado (ver [8]).

**Proposición 2.1.1.** *Si las funciones del problema  $(P)$  son convexas entonces toda solución Pareto-óptima local es global.*

*Demostración.* Sea  $\bar{x} \in X$  una solución Pareto-óptima local de  $(P)$ :  $\nexists x \in X \cap B(x, \delta)$  (con  $\delta > 0$ ) tal que

$$f_i(x) \leq f_i(\bar{x}), \forall i = 1, \dots, m \text{ y } f_{i_0}(x) < f_{i_0}(\bar{x}) \text{ para al menos un índice } i_0 \in \{1, \dots, m\}.$$

Si  $\bar{x}$  no fuese solución Pareto-óptima, existiría  $x^* \in X$  tal que

$$f_i(x^*) \leq f_i(\bar{x}), \forall i = 1, \dots, m \text{ y } f_{i_0}(x^*) < f_{i_0}(\bar{x}) \text{ para al menos un índice } i_0 \in \{1, \dots, m\}.$$

Considerando los puntos del segmento que une  $x^*$  y el centro de la bola:

$$x_\beta = \beta x^* + (1 - \beta)\bar{x} \in B(x, \delta)$$

para  $\beta$  suficientemente pequeño y además, usando la convexidad de las funciones y las desigualdades anteriores, se tiene

$$f_i(x_\beta) \leq \beta f_i(x^*) + (1 - \beta)f_i(\bar{x}) \leq f_i(\bar{x}), \quad \forall i = 1, \dots, m \text{ y } f_{i_0}(x_\beta) < f_{i_0}(\bar{x}).$$

Por tanto, llegamos a contradicción.  $\square$

**Definición 2.1.3** (Dominancia de Pareto). *Un vector de decisión  $x^1 \in X$  se dice que domina a otro vector de decisión  $x^2 \in X$  si*

1.  $f_i(x^1) \leq f_i(x^2), \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}.$
2.  $f_j(x^1) < f_j(x^2)$  para al menos un índice  $i_0 \in \{1, 2, \dots, m\}.$

En vista de esta última definición, podemos decir que un vector de decisión es óptimo en el sentido de Pareto si no existe otro vector de decisión que lo domine. El conjunto de todas las soluciones Pareto-óptimas se le llama **frontera de Pareto o frente de Pareto**. En la figura 2.1 está representado el frente de Pareto en color verde.

La optimización multicriterio tiene muchas aplicaciones hoy en día como puede ser en el campo de las finanzas a la hora de seleccionar los instrumentos de una cartera de inversión cuando tenemos dos objetivos que se contraponen: obtener el mayor rendimiento considerando el menor riesgo posible, problema de interés en este trabajo.

## 2.2. Planificación de inversiones

Una **cartera de inversión** es una combinación de activos financieros en los cuales se invierte con el objetivo de generar una plusvalía. La adecuada selección de los instrumentos de inversión que la integran, así como también la determinación de la proporción de la inversión que se destinará a cada instrumento, afectarán tanto al rendimiento como al riesgo esperado de dicha inversión. La siguiente imagen muestra una cartera de inversión formada por seis instrumentos financieros con la respectiva proporción a invertir en cada uno de ellos [9].

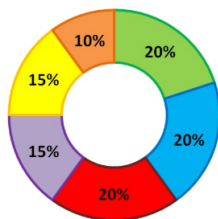


Figura 2.2: Ejemplo de cartera de inversión

### 2.2.1. Rentabilidad y riesgo de una cartera de inversión

Veamos ahora un conjunto de fórmulas relacionadas con el cálculo de la rentabilidad y el riesgo de una cartera de inversión, que estudiamos en la asignatura de Análisis y Evaluación de Inversiones correspondiente al Grado de Administración y Dirección de

Empresas.

El cálculo de la rentabilidad o rendimiento obtenido (en ausencia de dividendos) por el título o activo  $i$  –ésimo en el intervalo de tiempo  $[t-1, t]$  es el siguiente:

$$R_i(t) = \frac{P_{it} - P_{it-1}}{P_{it-1}} \quad (2.2)$$

donde  $P_{it}$  y  $P_{it-1}$  representan el precio de cotización del título  $i$  –ésimo en el tiempo  $t$  y  $t-1$ , respectivamente.

Vamos ahora a dar la expresión del riesgo de una inversión en bolsa, que no es ni más ni menos que la varianza del rendimiento de dicha inversión.

El rendimiento de una inversión en diferentes activos financieros en bolsa no es un valor fijo, sino que depende de los valores que toman dichas acciones a lo largo del tiempo. Por tanto, supuesto que tenemos  $n$  activos para invertir, podemos definir la función objetivo (en función del tiempo) como:

$$F(t) = R(t)^T x,$$

siendo  $x_i$  la proporción de capital a invertir en el activo  $i$  –ésimo y  $R_i(t)$  el rendimiento del activo  $i$  –ésimo en el tiempo  $t$ . Conocido el histórico de rendimientos de los últimos  $m$  periodos de tiempo,  $\{R(t_j)\}_{j=1}^m$ , podemos calcular la media:

$$\bar{F} = \frac{\sum_{j=1}^m F(t_j)}{m} = \frac{\sum_{j=1}^m R(t_j)^T x}{m} = \bar{R}^T x,$$

donde  $\bar{R}_i = \frac{\sum_{j=1}^m R_i(t_j)}{m}$  es la media del rendimiento en la inversión del activo  $i$  –ésimo y podemos calcular la varianza

$$\sigma_c^2 = \frac{\sum_{j=1}^m [F(t_j) - \bar{F}]^2}{m}. \quad (2.3)$$

Notemos que  $\sigma_c^2 = x^T V x$ , siendo  $V$  una matriz cuadrada de dimensión  $n \times n$  donde sus elementos vienen dados por las expresiones:

$$V_{kk} = \frac{\sum_{j=1}^m [R_k(t_j) - \bar{R}_k]^2}{m},$$

$$V_{ik} = \frac{\sum_{j=1}^m [R_i(t_j) - \bar{R}_i][R_k(t_j) - \bar{R}_k]}{m}.$$

En efecto, tenemos que, como  $F(t_j) - \bar{F}$  se puede expresar como  $(R(t_j) - \bar{R})^T x$ :

$$[F(t_j) - \bar{F}]^2 = x^T (R(t_j) - \bar{R})(R(t_j) - \bar{R})^T x.$$

Con los cálculos anteriores vemos que la función riesgo (definida como  $f(x) = x^T V x$ ) es una función cuadrática y convexa, propiedad útil en optimización.

### 2.2.2. Modelo de Markowitz

Diremos que una cartera de inversión es eficiente cuando esta proporciona el máximo rendimiento para un riesgo determinado, o el mínimo riesgo para un rendimiento determinado. Las carteras que cumplan esta condición formarán la frontera de Pareto. Véase en la siguiente imagen.

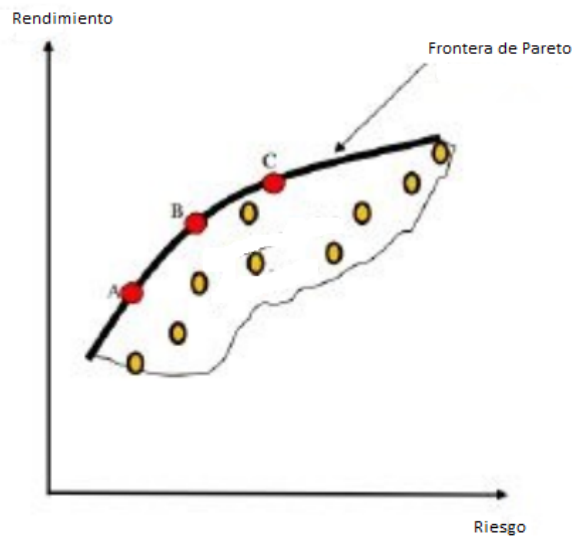


Figura 2.3: Ejemplo de frontera de Pareto.

Hoy en día encontramos muchos estudios sobre la creación de carteras de inversión eficientes. De entre todos esos estudios cabe destacar el modelo de Harry Markowitz que publicó en un artículo en 1952 [7], por el cual recibió el premio Nobel de Economía. El modelo presentado por Markowitz revolucionó la Teoría Moderna de Carteras (TMC) y sirvió como medio para la creación de nuevas teorías económicas.



Figura 2.4: Harry Markowitz

El artículo de Markowitz fue una revolución para los existentes estudios sobre inversiones en carteras. Harry Markowitz asumía que los inversores eran racionales y aversos



al riesgo y que, por tanto, el inversor seleccionará siempre su cartera de inversión en base a la relación rendimiento-riesgo.

El interés principal de su artículo era la selección de carteras de inversión eficientes. En su teoría hace también hincapié en la importancia de la diversificación a la hora de formar carteras de inversión eficientes.

La propuesta de Markowitz para calcular la frontera de Pareto se basa en un modelo de programación cuadrática. Este modelo trata de encontrar la proporción  $(x_i)$  a invertir en cada activo que forme la cartera de inversión de manera que se minimice el riesgo medido por la varianza.

Harry Markowitz divide el proceso de selección de carteras eficientes en dos etapas. La primera consiste en la estimación de los parámetros, es decir, estimar futuros rendimientos a través de la observación del histórico de rendimientos. La segunda, la llama la selección de carteras: una vez estimados dichos rendimientos en la primera etapa, nos basamos en esos datos para resolver el problema de optimización que se ajuste a nuestras preferencias para así obtener la proporción de capital a invertir en cada activo de la cartera de inversión.

A continuación formulamos el problema, que llamaremos Media-Varianza:

$$(P_{MV}) \begin{cases} \text{Min} & x^T V x - \alpha R^T x \\ \text{sujeto a} & x \in X_c \end{cases}$$

donde  $x_i$  es el **peso** o la proporción de capital a invertir en el activo  $i$  –ésimo,  $n$  es el número de activos que forman la cartera,  $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de covarianzas,  $\alpha \geq 0$ ,  $R \in \mathbb{R}^n$  es el vector de rendimientos y

$$X_c = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n \text{ y } e^T x = 1\},$$

siendo  $e \in \mathbb{R}^n$  el vector cuyas componentes son todas iguales a uno. Notemos que con esa función objetivo se pretende regular la minimización del riesgo y la maximización del rendimiento. El parámetro  $\alpha$  sirve para inclinar la balanza hacia uno u otro objetivo.

Este problema de programación cuadrática sigue siendo muy estudiado a día de hoy (ver por ejemplo [6]).

En relación a este modelo, formulamos ahora el problema de optimización multicriterio de carteras que, como dijimos, estudiaremos en este trabajo.

$$(P_c) \begin{cases} \text{Min} & (f_1(x), f_2(x)) \\ \text{sujeto a} & x \in X_c \end{cases}$$

donde  $f_1(x) = -R^T x$  y  $f_2(x) = x^T V x$ .



## Capítulo 3

# Resultados de existencia para la optimalidad de Pareto

Con respecto a nuestro problema general multiobjetivo,  $(P)$ , presentamos el siguiente problema auxiliar:

$$(P(x^*)) \begin{cases} \text{Min} & F(x) \\ \text{sujeto a} & f_i(x) \leq f_i(x^*), \quad i = 1, \dots, m, \\ & x \in X \end{cases}$$

donde  $F(x) = \sum_{i=1}^m f_i(x)$  y  $x^*$  es vector de decisión del conjunto  $X$  (definido en (2.1)). Este es un problema de optimización mono-objetivo. Denotaremos por  $A(P(x^*))$  al conjunto de puntos admisibles del problema  $(P(x^*))$  (ver en el anexo).

En los resultados que se presentan a continuación se caracterizan las soluciones Pareto-óptimas del problema  $(P_c)$  con las del problema auxiliar [10].

**Teorema 3.0.1.** *Sea  $\bar{x} \in X$  tal que  $A(P(\bar{x})) \neq \emptyset$ . Se tiene:  
 $\bar{x} \in X$  es solución Pareto-óptima del problema  $(P)$  si, y solo si,  $\bar{x}$  es solución global del problema  $(P(\bar{x}))$ .*

*Demostración.*  $\bar{x}$  es solución Pareto-óptima del problema  $(P)$  si, y solo si,

$\nexists x \in X$  tal que  $f_i(x) \leq f_i(\bar{x}), \forall i = 1, \dots, m$  y  $f_{i_0}(x) < f_{i_0}(\bar{x})$  para al menos un índice  $i_0 \in \{1, \dots, m\}$ .

Esto equivale a que

$$\nexists x \in X \text{ tal que } f_i(x) \leq f_i(\bar{x}), \forall i = 1, \dots, m \text{ y } \sum_{i=1}^m f_i(x) < \sum_{i=1}^m f_i(\bar{x}),$$

que a su vez es equivalente a que

$$\forall x \in A(P(\bar{x})), \text{ se tiene que } F(x) \geq F(\bar{x}).$$

Esto significa que  $\bar{x}$  es solución global de  $(P(\bar{x}))$ . □

**Nota:** Si  $A(P(\bar{x})) = \emptyset$ , entonces  $\bar{x}$  es solución Pareto-óptima del problema  $(P)$ .

**Teorema 3.0.2.** Sea  $x^* \in X$ . Si  $\bar{x} \in X$  es solución del problema  $(P(x^*))$  entonces  $\bar{x}$  es solución Pareto-óptima del problema  $(P)$  y  $f_i(\bar{x}) \leq f_i(x^*)$ ,  $\forall i = 1, \dots, m$ .

*Demostración.* Supongamos que  $\bar{x} \in X$  no es solución óptima en el sentido de Pareto del problema  $(P)$ . Entonces existe algún  $\tilde{x} \in X$  tal que  $f_i(\tilde{x}) \leq f_i(\bar{x}) \forall i = 1, \dots, m$  y  $f_{i_0}(\tilde{x}) < f_{i_0}(\bar{x})$  para cierto índice  $i_0 \in \{1, \dots, m\}$  y por tanto que

$$\sum_{i=1}^m f_i(\tilde{x}) < \sum_{i=1}^m f_i(\bar{x})$$

lo cual contradice que  $\bar{x}$  sea solución del problema  $(P(x^*))$ .  $\square$

En el caso del problema planteado para la inversión en carteras tenemos el siguiente corolario.

**Corolario 3.0.1** (Resultado de existencia). Existe solución Pareto-óptima para el problema  $(P_c)$ .

*Demostración.* Dado  $\tilde{x} \in X_c$ , consideramos el problema auxiliar

$$P_c(\tilde{x}) \begin{cases} \text{Min} & f_1(x) + f_2(x) \\ \text{sujeto a} & f_1(x) \leq f_1(\tilde{x}) \\ & f_2(x) \leq f_2(\tilde{x}) \\ & x \in X_c. \end{cases}$$

Se trata de un problema de optimización donde la función objetivo a minimizar es una función cuadrática y hay presentes tanto restricciones lineales como cuadráticas.

- Si  $A(P_c(\tilde{x})) = \emptyset$ , entonces  $\tilde{x}$  es solución Pareto-óptima del problema  $(P_c)$ .
- En otro caso, por ser la función a minimizar una función objetivo continua sobre un conjunto compacto, el problema auxiliar tiene soluciones globales (teorema de Weierstrass), las cuales, aplicando el teorema 3.0.1, son las soluciones óptimas en el sentido de Pareto del problema  $(P_c)$ .

$\square$

## Capítulo 4

# Condiciones de optimalidad multicriterio

En este capítulo todas las funciones que aparezcan en nuestros problemas serán continuamente diferenciables.

### 4.1. Condiciones de primer orden

Empezamos con una condición necesaria de tipo Fritz John (ver por ejemplo [8]).

**Teorema 4.1.1** (Condición necesaria de Fritz John para la optimalidad de Pareto). *Consideremos el problema de optimización multiobjetivo  $(P)$  y sea  $\bar{x} \in X$ . Entonces, se tiene que si  $\bar{x}$  es solución Pareto-óptima del problema  $(P)$ , existen  $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\bar{\lambda} \geq 0$ , y  $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^k$ ,  $\bar{\mu} \geq 0$ , tal que no todos son cero y se cumple*

$$\sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i \nabla f_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^k \bar{\mu}_j \nabla g_j(\bar{x}) = 0 \quad (4.1)$$

$$\bar{\mu}_j g_j(\bar{x}) = 0, \quad \forall j = 1, \dots, k. \quad (4.2)$$

*Demostración.* Consideremos el problema auxiliar  $(P(\bar{x}))$  formulado como se indicó al principio del capítulo anterior. Por el teorema 3.0.1, como  $\bar{x}$  es solución Pareto-óptima del problema  $(P)$ ,  $\bar{x}$  es solución óptima del problema  $(P(\bar{x}))$ , el cual es un problema de optimización mono-objetivo.

Haciendo uso de la regla de los multiplicadores de Lagrange (vista en la asignatura de Optimización I) sabemos que existen  $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}$ ,  $\bar{\alpha} \geq 0$ ,  $\tilde{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\tilde{\lambda} \geq 0$ , y  $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^k$ ,  $\bar{\mu} \geq 0$ , tales que se verifica:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} + \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i + \sum_{j=1}^k \bar{\mu}_j &> 0 \\ \bar{\alpha} \nabla F(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i \nabla f_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^k \bar{\mu}_j \nabla g_j(\bar{x}) &= 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\bar{\mu}_j g_j(\bar{x}) = 0, \quad \forall j = 1, \dots, k$$

Ahora, como

$$\nabla F(\bar{x}) = \sum_{i=1}^m \nabla f_i(\bar{x})$$

se tiene la igualdad (4.1) y (4.2) tomando  $\bar{\lambda}_i = \bar{\alpha} + \tilde{\lambda}_i, \forall i = 1, \dots, m$ .  $\square$

**Proposición 4.1.1.** *Supongamos que además de las hipótesis del teorema anterior se cumple una de las dos siguientes condiciones:*

- *Los gradientes  $\{\nabla g_j(\bar{x})\}_{j \in J(\bar{x})}$  son linealmente independientes, siendo*

$$J(\bar{x}) = \{j \in \{1, \dots, k\} : \bar{\mu}_j > 0 \text{ y } g_j(\bar{x}) = 0\}.$$

- *Las restricciones del problema (P) son lineales.*

Entonces las condiciones del teorema anterior se verifican para  $\bar{\lambda} \neq 0$ .

*Demostración.* Si los gradientes  $\{\nabla g_j(\bar{x})\}_{j \in J(\bar{x})}$  son linealmente independientes, concluimos que  $\bar{\lambda} \neq 0$  ya que si  $\bar{\lambda} = 0$ , se tendría que  $\bar{\alpha} = 0$  y que  $\tilde{\lambda}_i = 0, \forall i = 1, \dots, m$ , y por tanto

$$\sum_{j=1}^k \bar{\mu}_j > 0 \tag{4.4}$$

y la ecuación (4.3) sería

$$\sum_{j=1}^k \bar{\mu}_j \nabla g_j(\bar{x}) = 0. \tag{4.5}$$

Pero como  $\bar{\mu} \neq 0$  por (4.4), la ecuación (4.5) no puede darse.

En el caso de restricciones lineales podemos prescindir de la hipótesis de la independencia lineal sobre los gradientes.

Como las restricciones del problema son lineales,

$$g_j(\bar{x}) = a_j^T \bar{x} - b_j \Rightarrow \nabla g_j(\bar{x}) = a_j.$$

En efecto, si fuese  $\bar{\lambda} = 0$ , la igualdad (4.1) quedaría

$$\sum_{j \in J(\bar{x})} \bar{\mu}_j a_j = 0. \tag{4.6}$$

Ahora, como vimos en la asignatura de Optimización I y en [2], los  $\bar{\mu}_j$  son los límites de las sucesiones con término general

$$\beta_k \cdot \text{Max}\{0, g_j(x^k)\}$$

donde  $\beta_k > 0$  y  $(x^k) \rightarrow \bar{x}$ . Por tanto si se tiene que  $\bar{\mu}_{j_0} > 0$ , entonces

$$\bar{\mu}_{j_0} g_{j_0}(x^k) > 0, \quad \forall k \geq k_0.$$

Ahora bien, para  $k$  suficientemente grande

$$0 < \sum_{j \in J(\bar{x})} \bar{\mu}_j g_j(x^k) = \sum_{j \in J(\bar{x})} \bar{\mu}_j (a_j^T x^k - b_j) = \sum_{j \in J(\bar{x})} \bar{\mu}_j (a_j^T x^k - a_j^T \bar{x}) = \sum_{j \in J(\bar{x})} \bar{\mu}_j a_j^T (x^k - \bar{x})$$

llegando a contradicción por (4.6), así que  $\bar{\lambda} \neq 0$ .  $\square$

Notemos que el modelo de planificación de inversiones que hemos considerado tiene restricciones lineales.

Apoyados en las condiciones de optimalidad suficientes para un problema de optimización mono-objetivo, lo extendemos para el caso de un problema multiobjetivo.

**Teorema 4.1.2** (Condiciones de optimalidad suficientes para la optimalidad de Pareto). *Sean las funciones del problema (P) convexas y sea  $\bar{x} \in X$  un vector de decisión. Si existen multiplicadores  $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\bar{\lambda} > 0$ , y  $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^k$ ,  $\bar{\mu} \geq 0$ , tales que*

$$\sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i \nabla f_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^k \bar{\mu}_j \nabla g_j(\bar{x}) = 0 \quad (4.7)$$

$$\bar{\mu}_j g_j(\bar{x}) = 0, \quad \forall j = 1, \dots, k, \quad (4.8)$$

entonces  $\bar{x}$  es solución Pareto-óptima del problema (P).

*Demostración.* Sean  $\bar{\lambda}$  y  $\bar{\mu}$  vectores que satisfacen las condiciones indicadas del teorema. Definamos ahora la siguiente función

$$\tilde{F} : X \longrightarrow \mathbb{R}; \quad \tilde{F}(x) = \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i f_i(x).$$

Como todas las funciones  $f_i(x)$  son convexas y  $\bar{\lambda} > 0$ ,  $\tilde{F}$  también es convexa. Ahora, por (4.7) y (4.8), obtenemos

$$\nabla \tilde{F}(\bar{x}) + \sum_{j=1}^k \bar{\mu}_j \nabla g_j(\bar{x}) = 0$$

$$\bar{\mu}_j g_j(\bar{x}) = 0, \quad \forall j = 1, \dots, m.$$

Entonces, aplicando el Teorema 7.0.2,

$$\tilde{F}(\bar{x}) \leq \tilde{F}(x), \quad \forall x \in X.$$

En otras palabras,

$$\sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i f_i(\bar{x}) \leq \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i f_i(x), \quad \forall x \in X. \quad (4.9)$$

Supongamos ahora que  $\bar{x}$  no es solución Pareto-óptima del problema (P). Entonces habrá algún vector de decisión  $\hat{x} \in X$  tal que  $f_i(\hat{x}) \leq f_i(\bar{x})$ ,  $\forall i = 1, \dots, m$  y al menos un índice  $i_0$  tal que  $f_{i_0}(\hat{x}) < f_{i_0}(\bar{x})$ . Pero como todos los  $\bar{\lambda}_i$  son positivos, tendríamos que

$$\sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i f_i(\hat{x}) < \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i f_i(\bar{x}),$$

lo que contradice la ecuación (4.9). Por tanto,  $\bar{x}$  es solución óptima en el sentido de Pareto del problema (P).  $\square$

## 4.2. Condiciones de segundo orden

En esta sección mostraremos las condiciones de optimalidad necesarias y suficientes que involucran a la segunda derivada. Para el caso del problema de inversión en carteras no tienen interés por verificarse la hipótesis de convexidad pero las presentamos con el fin de dar una visión completa de las condiciones de optimalidad.

Antes de nada, es necesario definir el siguiente concepto:

**Definición 4.2.1** (Vector de decisión regular). *Un vector de decisión  $x^* \in X$  se dice que es regular si los gradientes de las restricciones activas (ver en el anexo) en  $x^*$  son linealmente independientes.*

**Teorema 4.2.1** (Condiciones de optimalidad necesarias de segundo orden para la optimalidad de Pareto). *Sea  $\bar{x} \in X$  un vector de decisión regular. Una condición necesaria para que  $\bar{x}$  sea solución Pareto-óptima del problema (P) es que existan vectores  $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\bar{\lambda} \geq 0$  ( $\bar{\lambda} \neq 0$ ), y  $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^k$ ,  $\bar{\mu} \geq 0$ , tales que*

$$\sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i \nabla f_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^k \bar{\mu}_j \nabla g_j(\bar{x}) = 0 \quad (4.10)$$

$$\bar{\mu}_j g_j(\bar{x}) = 0, \quad \forall j = 1, \dots, k. \quad (4.11)$$

$$d^T \left( \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i \nabla^2 f_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^k \bar{\mu}_j \nabla^2 g_j(\bar{x}) \right) d \geq 0 \quad (4.12)$$

para todo  $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  tal que  $\nabla f_i(\bar{x})^T d \leq 0$ ,  $\forall i = 1, \dots, m$  y  $\nabla g_j(\bar{x})^T d = 0$ ,  $\forall j \in J(\bar{x})$ , siendo  $J(\bar{x}) = \{j \in \{1, \dots, k\} : g_j(\bar{x}) = 0\}$ , el conjunto de restricciones activas en el punto  $\bar{x}$ .

**Teorema 4.2.2** (Condiciones suficientes de segundo orden para la optimalidad de Pareto). *Sea  $\bar{x} \in X$  un vector de decisión. Si existen vectores  $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\bar{\lambda} \geq 0$ , y  $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^k$ ,  $\bar{\mu} \geq 0$ , con  $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) \neq (0, 0)$  tales que*

$$\sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i \nabla f_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^k \bar{\mu}_j \nabla g_j(\bar{x}) = 0 \quad (4.13)$$

$$\bar{\mu}_j g_j(\bar{x}) = 0, \quad \forall j = 1, \dots, k \quad (4.14)$$

$$d^T \left( \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i \nabla^2 f_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^k \bar{\mu}_j \nabla^2 g_j(\bar{x}) \right) d > 0 \quad (4.15)$$

para  $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  tal que  $\nabla f_i(\bar{x})^T d \leq 0$ ,  $\forall i = 1, \dots, m$  y  $\nabla g_j(\bar{x})^T d = 0$ ,  $\forall j \in J(\bar{x})$ , o  $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  verificando que  $\nabla g_j(\bar{x})^T d = 0$ ,  $\forall j \in J^+(\bar{x})$  y  $\nabla g_j(\bar{x})^T d \leq 0$ ,  $\forall j \in J(\bar{x}) \setminus \{J^+(\bar{x})\}$ , donde  $J^+(\bar{x}) = \{j \in J(\bar{x}) : \bar{\mu}_j > 0\}$ , entonces  $\bar{x}$  es solución Pareto-óptima del problema (P).

Para su demostración se pueden consultar las referencias que aparecen en [8].



## Capítulo 5

# Resultados numéricos

En este capítulo vamos a mostrar algunos de los resultados que hemos obtenido con Matlab (versión R2019a) en nuestra experimentación. Consideraremos varios modelos de optimización que pasamos a describir en la sección siguiente.

### 5.1. Modelos de optimización

En este trabajo se han considerado tres modelos de optimización de carteras de inversión. El primero de ellos, que hemos denotado en la sección 2.2.2 como  $(P_c)$ , es un modelo multiobjetivo. Relacionado con este tenemos el problema Media-Varianza  $(P_{MV})$ , formulado en la misma sección. Como caso particular de este último, consideramos el problema de Mínima varianza,  $(P_{mv})$ , que corresponde al caso de tomar el parámetro de penalización  $\alpha = 0$ . Así,  $(P_{mv})$  es independiente del vector de rendimientos. Los dos últimos modelos son problemas de programación cuadrática convexa.

### 5.2. Datos para los experimentos

A la hora de resolver numéricamente los tres problemas presentados hemos utilizado tres bases de datos distintas. Las dos primeras, port1 y port2, pertenecen a la librería OR [1] y no precisan de ninguna estimación por nuestra parte, pues los datos nos venían dados. En la tabla 5.1 se resumen algunas de sus propiedades: el origen y el tamaño.

Datos	Fuente	Número de activos
port1	Hong Kong, Hang Seng	31
port2	German, DAX 100	85

Tabla 5.1: Origen y tamaño de port1 y port2.

La tercera base de datos (que la llamaremos datos3 a partir de ahora) se corresponde

Índice	Mercado financiero
S&P 500	EEUU
Nasdaq-100	EEUU
Dow Jones	EEUU
Eurostoxx 50	Europa
WTI Oil	EEUU
Gold	EEUU

Tabla 5.2: Índices bursátiles.

con el histórico de precios o valores de seis índices bursátiles que se obtuvieron de Bloomberg Finance L. P (compañía estadounidense de asesoría financiera). En la tabla 5.2 se describe la composición de datos3 y el origen de cada índice bursátil. Como vemos, todos son del mercado estadounidense excepto el Eurostoxx 50.

La diferencia con respecto a las otras dos bases de datos es que para resolver los modelos de optimización con datos3 tenemos que realizar el cálculo de la estimación de los rendimientos y de la matriz de covarianzas. Para ello, como primer reto, hay que elegir el periodo de tiempo para realizar el cálculo de las estimaciones. Tras consultar en varios artículos, decidimos tomar un histórico de 10 años.

El histórico de datos empieza en enero del año 2000 y finaliza en diciembre 2018. Para cada uno de los índices tenemos un precio o valor por cada mes, llegando a tener por tanto un total de 228 datos para cada uno de ellos. A la hora de resolver los problemas de optimización de carteras de inversión empleamos la técnica de la ventana deslizante. Para ello, consideramos muestras (ventanas) de 120 meses. La primera de esas muestras va desde enero de 2000 hasta diciembre de 2009 (10 años) y la última ventana va desde enero 2009 hasta diciembre de 2018. Asociado a cada ventana nos planteamos un problema de optimización donde las estimaciones se realizan con los datos correspondientes a los 10 años de cada ventana. Para realizar dicha estimación, calculamos (de acuerdo a la fórmula (5.4)) los rendimientos entre los periodos de tiempo consecutivos y finalmente el rendimiento estimado será la media de dichos rendimientos consecutivos. En la práctica, empleamos la función `tick2ret` de Matlab para realizar esos cálculos. Con estos rendimientos estimados resolvemos el problema con el que estemos trabajando. Una vez hecho esto, actualizamos la ventana temporal de datos excluyendo el primer mes e introduciendo el siguiente al último. De esta forma se va corriendo la ventana de mes a mes. En total tenemos 108 problemas a lo largo del proceso de la ventana deslizante.

El proceso se repite hasta el final de nuestro conjunto de datos de valores. En la figura 5.1 podemos observar un esquema que explica la técnica de la ventana deslizante.

Para resolver los problemas, los datos se han cargado directamente a Matlab desde un archivo excel (empleando la función `xlsread` de Matlab).



Figura 5.1: Esquema de la ventana deslizante.

### 5.3. Trabajando con software mono-objetivo

Para empezar a calcular soluciones Pareto-óptimas podemos usar software monocriterio. Fijada una cota inferior para el rendimiento, toda solución de  $(P_{MV})$  pertenece a la frontera de Pareto ya que se trata de una cartera que nos proporciona un riesgo que no puede ser mejorado sin disminuir el rendimiento. Al ser un problema convexo, todas las soluciones son globales. Además, si la matriz  $V$  es definida positiva, el problema cuadrático  $(P_{MV})$  tiene solución única. Esa solución ha sido calculado con la función de Matlab `quadprog` (que empleamos en numerosas ocasiones en la asignatura de Optimización I).

### 5.4. Eligiendo el software multicriterio

Ahora nos planteamos obtener varias soluciones Pareto resolviendo el problema de optimización multiobjetivo de inversión en carteras. Para ello tuvimos que probar varios códigos de Matlab. Estos fueron: `gamultiobj`, `paretosearch` y `estimateFrontier`.

Presentamos en la figura 5.2 el rendimiento y el riesgo de las carteras de inversión obtenidas como solución del problema multicriterio de carteras  $(P_c)$  con los tres códigos y trabajando con `port1`. En amarillo está representado el frente de Pareto calculado por la función `estimateFrontier`. Como vemos, las soluciones obtenidas tanto por `gamultiobj` (representado en verde) como por `paretosearch` (en azul) no son soluciones globales (o soluciones Pareto-óptimas) pues hay carteras correspondientes al color amarillo que son mejores en cuanto a los dos criterios: tienen un mayor rendimiento y un menor riesgo.

En la figura 5.3 se presentan las soluciones obtenidas con la base de datos `port2`. Como vemos de nuevo, las soluciones obtenidas con `gamultiobj` y `paretosearch` no son óptimas en el sentido de Pareto.

En teoría, gamultiobj busca el frente de Pareto usando un algoritmo genético. Esta función calcula soluciones locales pero eso en nuestro problema de optimización de inversión en carteras no influye puesto que tanto las funciones objetivo como el conjunto de puntos admisibles son convexos y por tanto no hay distinción entre soluciones locales y globales. Sin embargo, como hemos observado experimentalmente se obtienen soluciones que no forman parte del frente de Pareto pues podíamos encontrar carteras que asumiendo el mismo nivel de riesgo obtenían un rendimiento mayor (ver la figura 5.2 y 5.3).

En cuanto a paretosearch, este implementa un método de búsqueda clásico que surge como generalización de los métodos de búsqueda directa (sin derivadas) de la optimización mono-objetivo. Observando las gráficas, vemos que se comporta mejor que gamultiobj y además en mis experimentos realizaba un menor número de evaluaciones de la función.

Finalmente, como ya hemos dicho, me decidí por la función estimateFrontier perteneciente a la Financial Toolbox. Esta función la usamos con la opción lcprog que emplea el algoritmo de Lemke (un método de tipo conjunto activo) para el problema de Media-Varianza. Esta es una función que estima un número específico de carteras de inversión pertenecientes a la frontera eficiente.

Dado un problema de optimización en un objeto “Portfolio”, la función estimateFrontier calcula carteras de inversión eficientes espaciadas entre la cartera de menor rendimiento y la de mayor rendimiento.

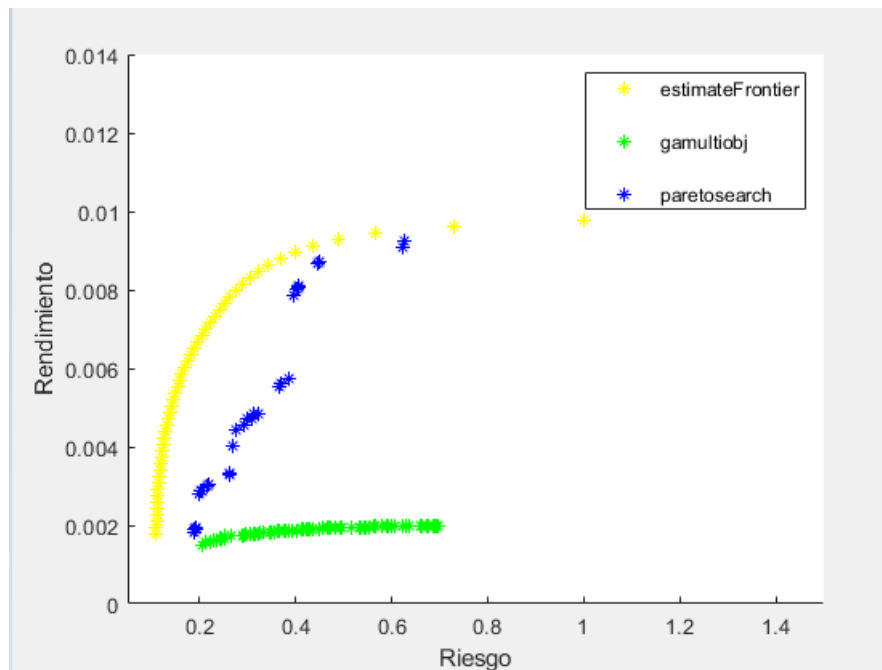


Figura 5.2: Rendimiento y riesgo de las carteras de inversión asociadas a port1.

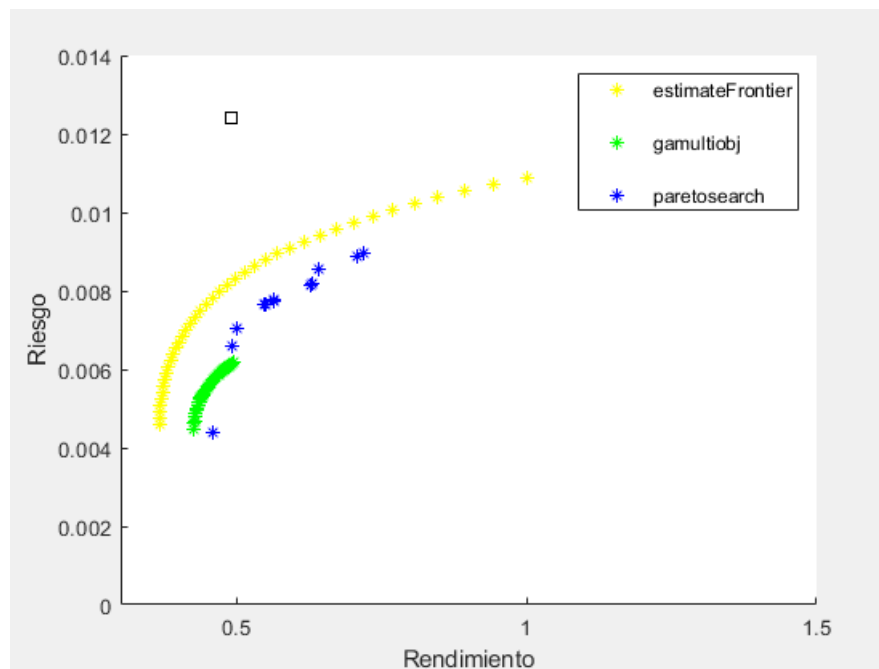


Figura 5.3: Rendimiento y riesgo de las carteras de inversión asociadas a port2.

Por lo tanto, como con las bases de datos de port1 y port2, en las cuales, como ya hemos dicho, no tuvimos que realizar ningún cálculo de estimación de los datos, los códigos gamultiobj y paretosearch no calculan soluciones Pareto-óptimas, no serán considerados para resolver el problema multiobjetivo de la inversión en carteras asociados a datos3.

Antes de continuar con los experimentos numéricos, a la vista de los resultados nos preguntamos por la razón de ese distinto comportamiento. Averiguamos el tipo de método numérico que implementa cada uno de los tres códigos. estimateFrontier se aprovecha de la estructura de los problemas y utiliza las condiciones de optimalidad en el criterio de parada del proceso iterativo. Sin embargo, los otros dos códigos, gamultiobj y paretosearch, están preparados para funciones generales, sin estructura especial, de las que solo conocen su valor en cada vector de decisión seleccionado. Así que, como hemos visto a lo largo del Grado, el método que más se adapta a la estructura del problema concreto es el que se comporta mejor.

## 5.5. Experimentación con datos3

Comenzamos este apartado mostrando en la figura 5.4 las gráficas de los 108 rendimientos estimados para cada uno de los seis índices para tener una visión de como han ido evolucionando a lo largo de nuestro espacio temporal definido, en este caso, por las 108 ventanas.

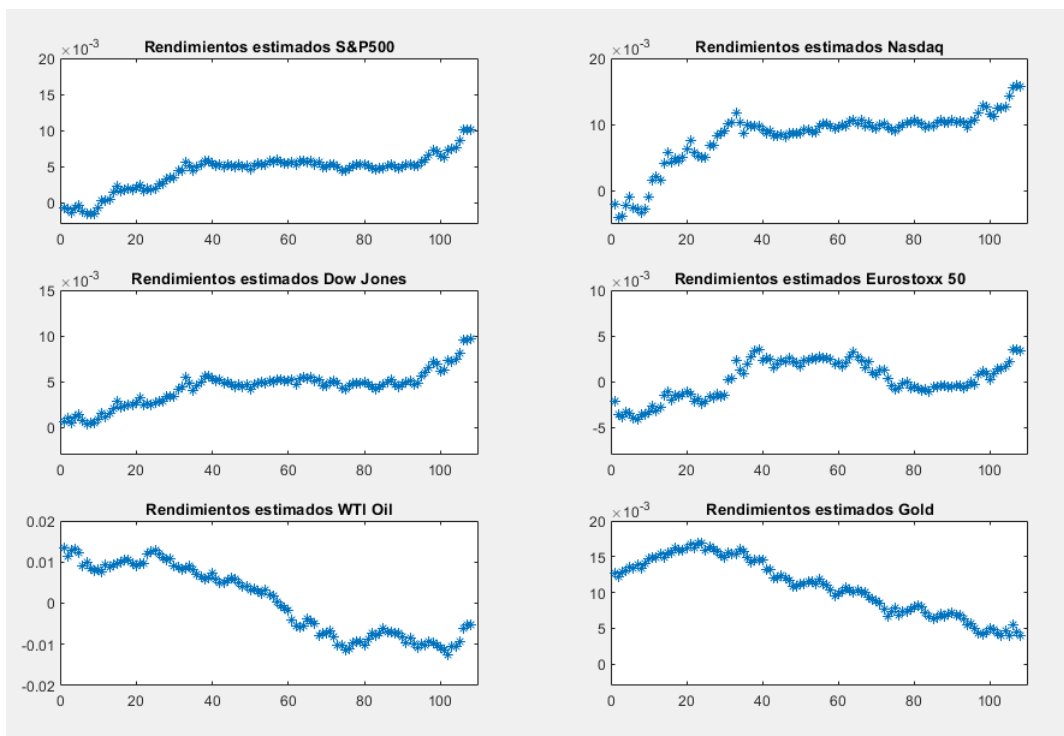


Figura 5.4: Evolución de los rendimientos estimados.

Tras un primer vistazo podemos observar que el índice WTI Oil es el que presenta rendimientos estimados negativos un mayor periodo de tiempo, mientras que es el índice Nasdaq el que parece que presenta un mayor crecimiento en el rendimiento. En cuanto al índice Gold, aunque los rendimientos estimados hayan sufrido una caída notable, se siguen manteniendo en valores positivos.

Estas evoluciones de los rendimientos estimados pueden ser justificadas fijándonos en la evolución del histórico de los precios o valores de los índices. De modo que si los precios aumentan de valor el rendimiento aumentará y si los precios sufren una caída los rendimientos bajarán también. En la figura 5.5 reflejamos las evoluciones de los precios a lo largo de 228 meses.

Como vemos, los valores del índice WTI Oil sufren una caída de valor considerable y por eso los rendimientos estimados son negativos. Con el índice Gold, que aunque los rendimientos estimados sean positivos, se ve que dichos rendimientos disminuyen a medida que avanza el tiempo y se justifica con la caída de sus precios aproximadamente a partir del mes 140. En cuanto al resto de índices, las gráficas correspondientes a los rendimientos y a los precios tienen una evolución similar.

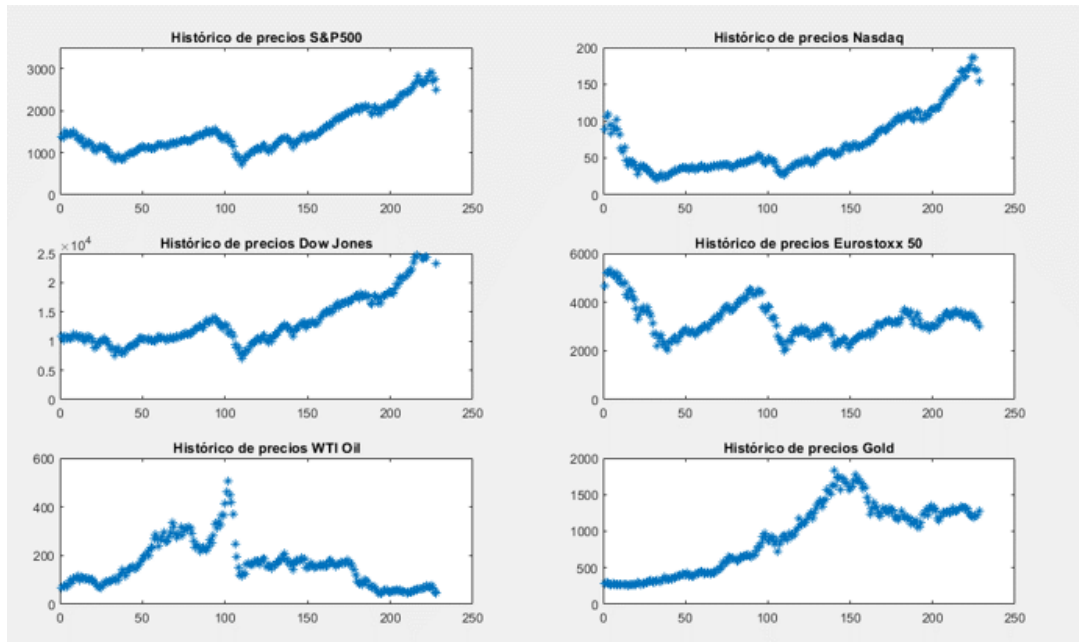


Figura 5.5: Evolución de los precios de los índices.

### 5.5.1. Inestabilidad de los modelos

En esta sección, motivados por los artículos [4] y [5], se tratará de considerar la inestabilidad de las soluciones de los modelos de optimización mono-objetivo con nuestros datos. Estamos interesados en estudiar las variaciones de la soluciones del modelo matemático frente a variaciones en el vector de rendimientos. Se van a presentar las soluciones obtenidas al resolver los tres modelos de optimización presentados anteriormente utilizando datos3. Los problemas Mínima Varianza y Media-Varianza los resolveremos tanto con la consideración de la restricciones de cota  $x \geq 0$ , como sin ella, para analizar su influencia. En el caso de haber prescindido de la restricción de cota, las soluciones no tienen interpretación financiera.

Comenzamos resolviendo el problema  $(P_{MV})$  con  $\alpha = 0$  sin considerar la restricción de cota  $x \geq 0$ . Como dijimos anteriormente, al tratarse de un problema de programación cuadrática, lo resolveremos con el código quadprog de Matlab. En la figura 5.6 mostramos los resultados asociados a las 108 soluciones, una por cada una de las 108 ventanas temporales de que disponemos. En la gráfica de la izquierda, en el eje de abscisas, se tiene a las ventanas temporales y en el de ordenadas el valor de  $x_i$  en cada solución para  $i = 1, \dots, 6$ . Usamos un color distinto para cada coordenada. En la gráfica de la derecha representamos el boxplot (ver en el anexo) correspondiente a esas soluciones.

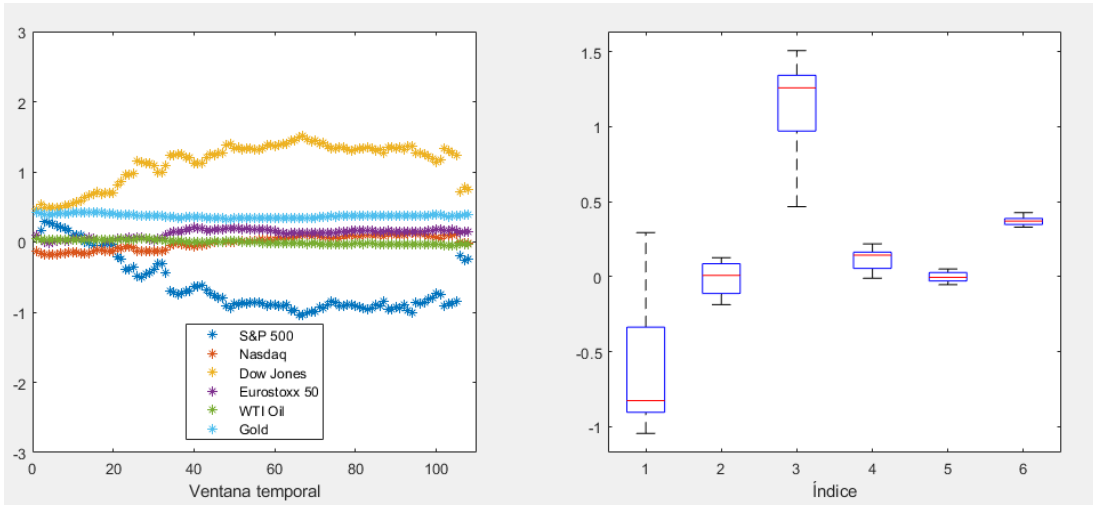


Figura 5.6: Soluciones del problema  $(P_{mv})$  sin la restricción de cota.

Como vemos, los índices cuyos pesos asociados presentan mayor variabilidad de valores son el S&P 500 y el Dow Jones y de ahí que el tamaño de las correspondientes cajas en la gráfica boxplot sean mayores. Las soluciones del resto de los índices no presentan grandes cambios a lo largo de las ventanas temporales y por tanto el tamaño de sus cajas son más pequeñas, estando los pesos de algunos de ellos muy próximos a cero.

En las figuras 5.7 y 5.8 mostramos las soluciones obtenidas para el problema Media-Varianza con  $\alpha = 0,3$  y  $\alpha = 1$ , respectivamente. En ambos casos no hemos considerado las restricciones de cota  $x \geq 0$ .

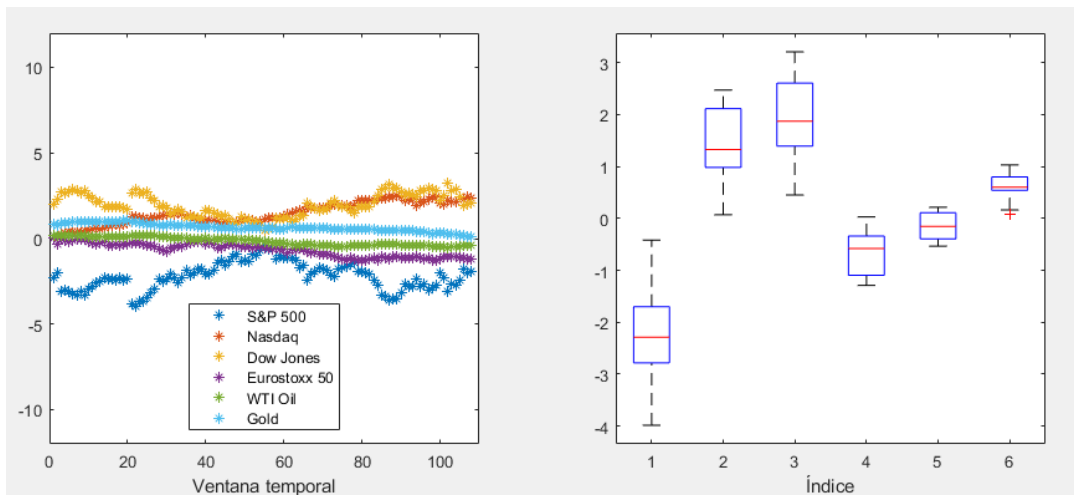


Figura 5.7: Soluciones del problema  $(P_{MV})$  sin la restricción de cota con  $\alpha = 0,3$ .



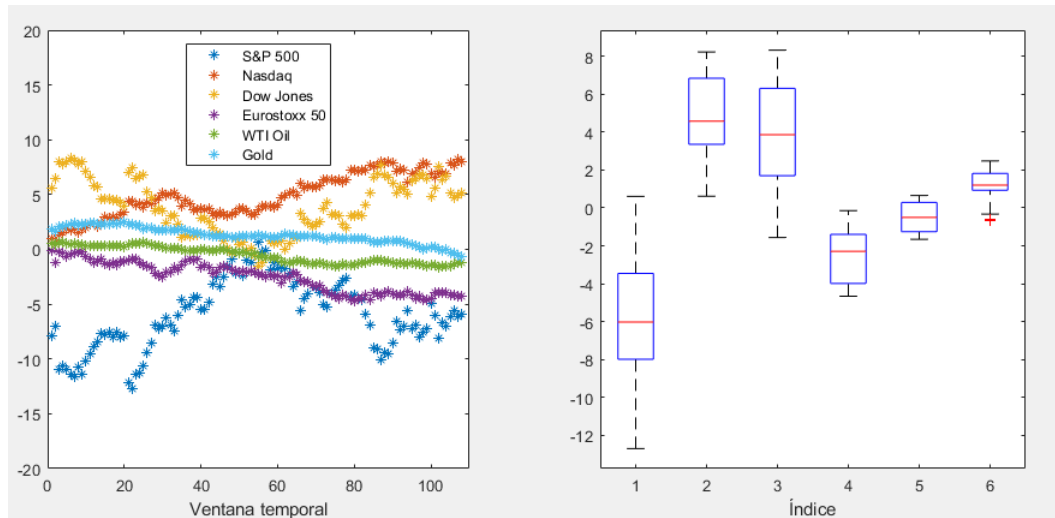


Figura 5.8: Soluciones del problema  $(P_{MV})$  sin la restricción de cota con  $\alpha = 1$ .

Como podemos observar, a medida que  $\alpha$  aumenta, la inestabilidad en las soluciones también aumenta. Esto puede ser debido a que entran más en juego las estimaciones de los rendimientos (como ocurre en [4]). Así, por ejemplo, el rango de los valores del activo S&P 500 varía aproximadamente entre -12 y 0 cuando  $\alpha = 1$ , mientras que con  $\alpha = 0,3$  varía entre -4 y 0 y con  $\alpha = 0$  entre -1 y 0. Lo mismo ocurre también con el resto de activos donde los valores que toman sus correspondientes pesos tienen una horquilla mayor.

Con el fin de apreciar aún mejor la estabilidad de las soluciones obtenidas en el problema de Mínima Varianza respecto a las obtenidas en el problema Media-Varianza mostramos la figura 5.9, donde aparecen las soluciones de  $(P_{mv})$  en la misma escala que la gráfica de la izquierda de la figura 5.8, donde aparecen las soluciones de  $(P_{MV})$  con  $\alpha = 1$ .

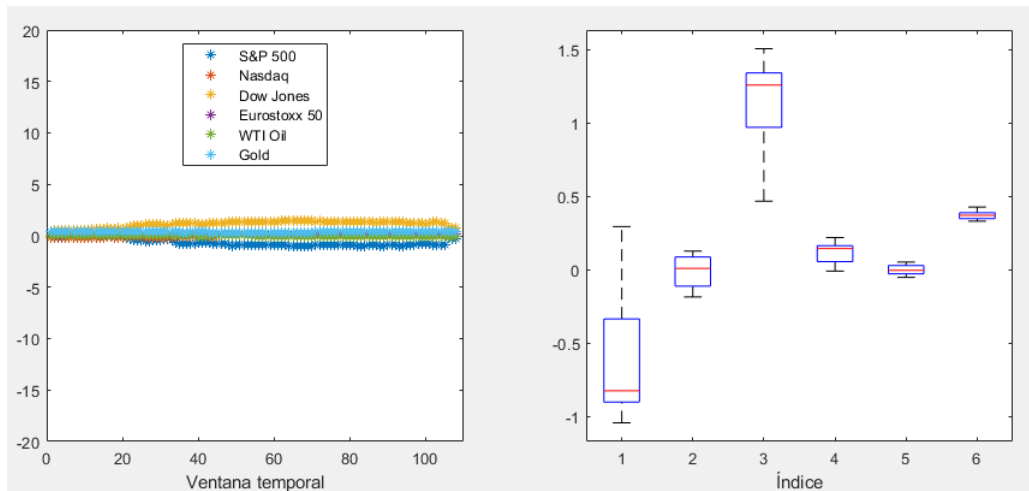


Figura 5.9: Soluciones del problema  $(P_{mv})$  sin la restricción de cota (otra escala).

Mostramos ahora las soluciones de estos dos mismos problemas mono-objetivo pero ya teniendo en consideración la restricción  $x \geq 0$ .

Comenzamos al igual que antes con el problema Mínima Varianza, al que corresponde la figura 5.10. Tras resolver el problema, cuyo objetivo es minimizar el riesgo de la inversión exclusivamente, observamos que los pesos asociados a los activos S&P 500 y Nasdaq son cero y por tanto esto nos indica que para formar una cartera de inversión con el menor riesgo posible no debemos invertir porcentaje de nuestro capital en esos dos activos. El índice en que más capital debemos invertir a lo largo de todo el espacio temporal para asumir el menor riesgo posible es el Dow Jones, seguido del Gold. En las 30 primeras ventanas temporales aproximadamente, el tercer índice en el que se invierte capital es el WTI Oil pero a partir de ese tiempo pasa a ser el índice Eurostoxx 50 en el que se invierte, pasando a no invertir nada en el WTI Oil.

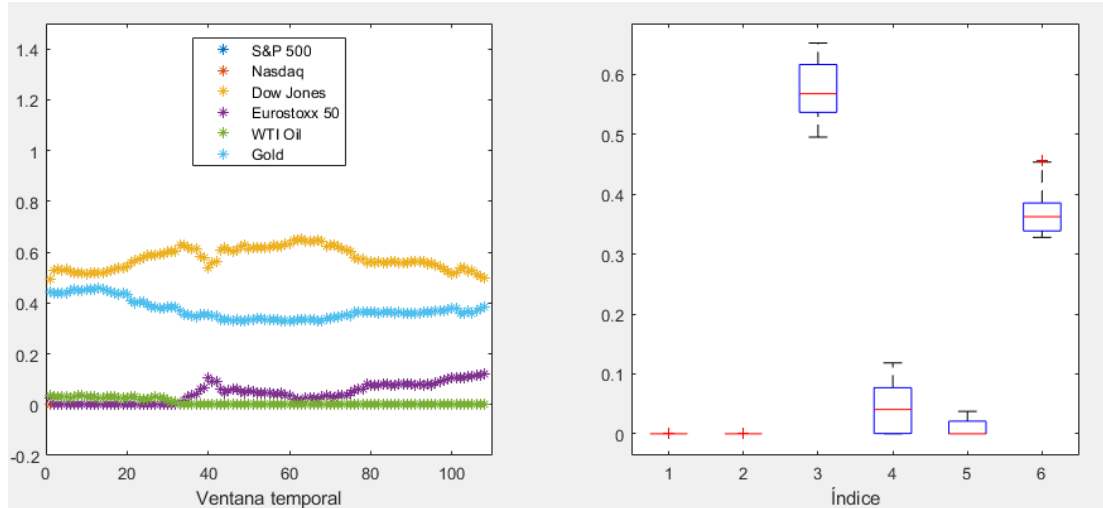


Figura 5.10: Soluciones del problema ( $P_{mv}$ ).

En cuanto a las soluciones del problema Media-Varianza, mostramos como antes las correspondientes al considerar el parámetro de penalización  $\alpha = 0,3$  (figura 5.11) y seguido con  $\alpha = 1$  (figura 5.12). Al igual que pasaba al resolver los problemas sin la restricción de cota  $x \geq 0$ , se aprecia mayor estabilidad de las soluciones en el problema de Mínima Varianza pues los pesos asociados a cada índice apenas sufren variaciones a lo largo de todo el espacio temporal mientras que los pesos calculados para el problema Media-Varianza sufren variaciones que van desde tomar valor igual a cero hasta tomar valor igual a uno (esto ocurre con las soluciones correspondientes a los índices Nasdaq y Gold).

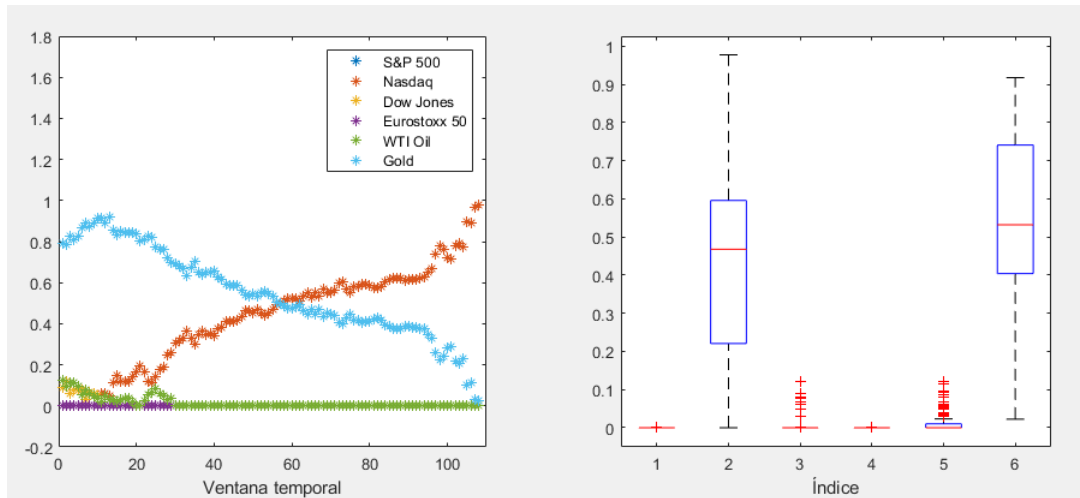


Figura 5.11: Soluciones del problema ( $P_{MV}$ ) con  $\alpha = 0,3$ .

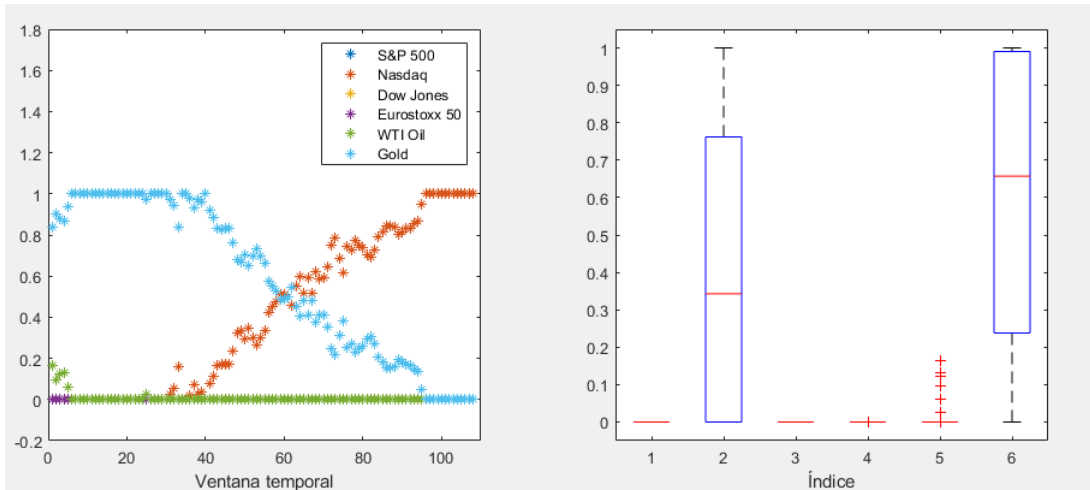


Figura 5.12: Soluciones del problema ( $P_{MV}$ ) con  $\alpha = 1$ .

Esa inestabilidad de las soluciones del problema Media-Varianza crece al aumentar el valor de  $\alpha$ , pues los pesos asociados a los índices Gold y Nasdaq toman valores extremos durante un mayor espacio temporal. Además, también se aprecia ese aumento de inestabilidad cuando  $\alpha = 1$  en la gráfica boxplot, donde el tamaño de las cajas es mayor.

Para analizar la influencia de las restricciones, podemos comprar las figuras 5.6 y 5.10, 5.7 y 5.11 y, finalmente, 5.8 y 5.12. A la vista de las gráficas podemos concluir también que las soluciones obtenidas tras resolver los problemas sin la restricción de cota son más inestables que cuando se calculan considerando la restricción.

Una vez mostradas las gráficas con las soluciones correspondientes a cada modelo

de optimización, realizamos una tabla de resultados donde quede reflejado los rendimientos estimados y los riesgos de las soluciones (carteras de inversión) que han sido calculadas con los problemas de Mínima Varianza y Media-Varianza.

Como el número de problemas resueltos es demasiado grande (108, uno por cada ventana temporal) calcularemos las medias de los rendimientos y los riesgos. Como es lógico, la media de los rendimientos correspondientes a las carteras de inversión calculadas en el problema Media-Varianza será mayor que en el otro problema pues en el de Mínima Varianza el único objetivo es minimizar el riesgo, y a menor riesgo asumido, menor rendimiento estimado se obtendrá. Como vemos, el problema ( $P_{mv}$ ) es aquel

	Problema		
	( $P_{mv}$ )	( $P_{MV}$ ), $\alpha = 0,3$	( $P_{MV}$ ), $\alpha = 1$
Media riesgo	$1,0966 \cdot 10^{-3}$	$1,6544 \cdot 10^{-3}$	$2,1386 \cdot 10^{-3}$
Media rendimiento	$6,7381 \cdot 10^{-3}$	$1,1303 \cdot 10^{-2}$	$1,2242 \cdot 10^{-2}$
Mediana riesgo	$1,1006 \cdot 10^{-3}$	$1,6100 \cdot 10^{-3}$	$2,1771 \cdot 10^{-3}$
Mediana rendimiento	$6,7817 \cdot 10^{-3}$	$1,0598 \cdot 10^{-2}$	$1,1498 \cdot 10^{-2}$
Mínimo riesgo	$8,4730 \cdot 10^{-4}$	$1,4639 \cdot 10^{-3}$	$1,4799 \cdot 10^{-3}$
Mínimo rendimiento	$4,6887 \cdot 10^{-3}$	$8,0784 \cdot 10^{-3}$	$8,5316 \cdot 10^{-3}$
Máximo riesgo	$1,2049 \cdot 10^{-3}$	$2,0301 \cdot 10^{-3}$	$2,8934 \cdot 10^{-3}$
Máximo rendimiento	$9,1227 \cdot 10^{-3}$	$1,5501 \cdot 10^{-2}$	$1,6870 \cdot 10^{-2}$

Tabla 5.3: Tabla media riesgos y rendimientos estimados.

cuyas soluciones tienen una media de riesgo menor que las soluciones del problema ( $P_{MV}$ ). Al contrario pasa con la media de los rendimientos, donde los mayores valores los toman las carteras de inversión del problema ( $P_{MV}$ ) cuando el parámetro penalti  $\alpha$  es mayor.

Pasamos ahora a mostrar las soluciones del problema multicriterio de inversión en carteras con datos<sup>3</sup>. Al tratarse ( $P_c$ ) de un problema con más de una función a minimizar, empleamos la función `estimateFrontier` de Matlab para resolverlo. En este caso, la solución obtenida no será única sino que obtendremos un conjunto de soluciones Pareto-óptimas que formarán el frente de Pareto. Hemos decidido que el código calcule 20 soluciones Pareto-óptimas. En la figura 5.13 dibujamos la gráfica de algunos frentes de Pareto a partir de esas soluciones obtenidas, en el eje de abscisas aparece el riesgo y en el de ordenadas el rendimiento.

En la práctica, para cada una de las 108 ventanas temporales, obtenemos una matriz de dimensión  $6 \times 20$  con las soluciones óptimas en el sentido de Pareto, donde cada columna se corresponde con los pesos asociados a cada índice de una cartera eficiente.

Como el número de fronteras de Pareto calculadas (108) es muy grande para ser mostradas todas en una gráfica, hemos representado en una misma gráfica los frentes de Pareto correspondientes al mes de enero de cada año, es decir, nueve en total, de enero 2010 hasta enero de 2018, y de esta forma tenemos una imagen visual de la evolución de los frentes de Pareto a medida que avanza el tiempo.

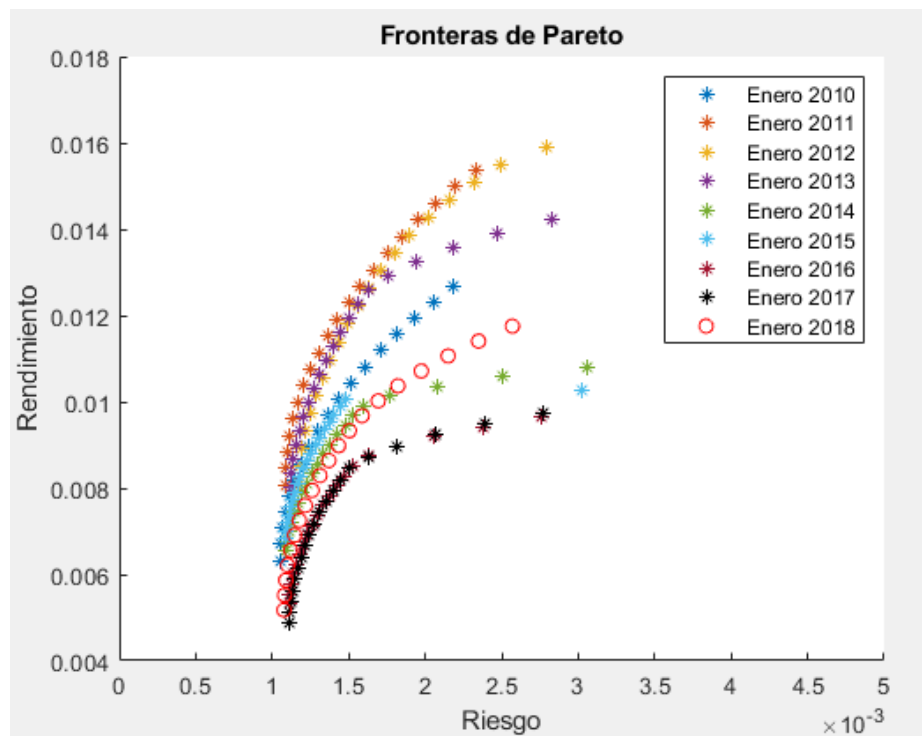


Figura 5.13: Frentes de Pareto del problema ( $P_c$ ).

Es claro que a medida que queramos invertir en carteras de inversión con mayor rendimiento estimado, el riesgo que asumiremos también será mayor (como se aprecia en la figura 5.13). En los cuatro primeros años se aprecia como el mercado ofrecía mayores ventajas que en los últimos cuatro años pues podemos encontrar carteras de inversión que a igual cantidad de riesgo asumido, el rendimiento estimado es mayor. También se aprecia una mejoría en el año 2018 respecto al 2017 ya que encontramos carteras donde, asumiendo el mismo riesgo, el rendimiento aumenta en un 0,3 %, que es una subida significativa dentro de los valores con los que trabajamos.

Ahora, como información adicional, vamos a visualizar, a modo de ejemplo, en gráficos de sectores, las proporciones de capital a invertir en cada índice que forma la cartera de inversión número 10 de cada uno de los nueve frentes de Pareto que tenemos. En la primera fila están representados las carteras correspondientes a los meses de enero de los años 2010, 2011 y 2012. En la segunda las correspondientes a enero de 2013, 2014 y 2015. Por último, en la tercera fila tenemos las de enero 2016, 2017 y 2018. Como observamos, no hay cartera en la que intervengan todos los índices. Si uno desea evitar ese comportamiento podría añadir las correspondientes restricciones de cota al problema.

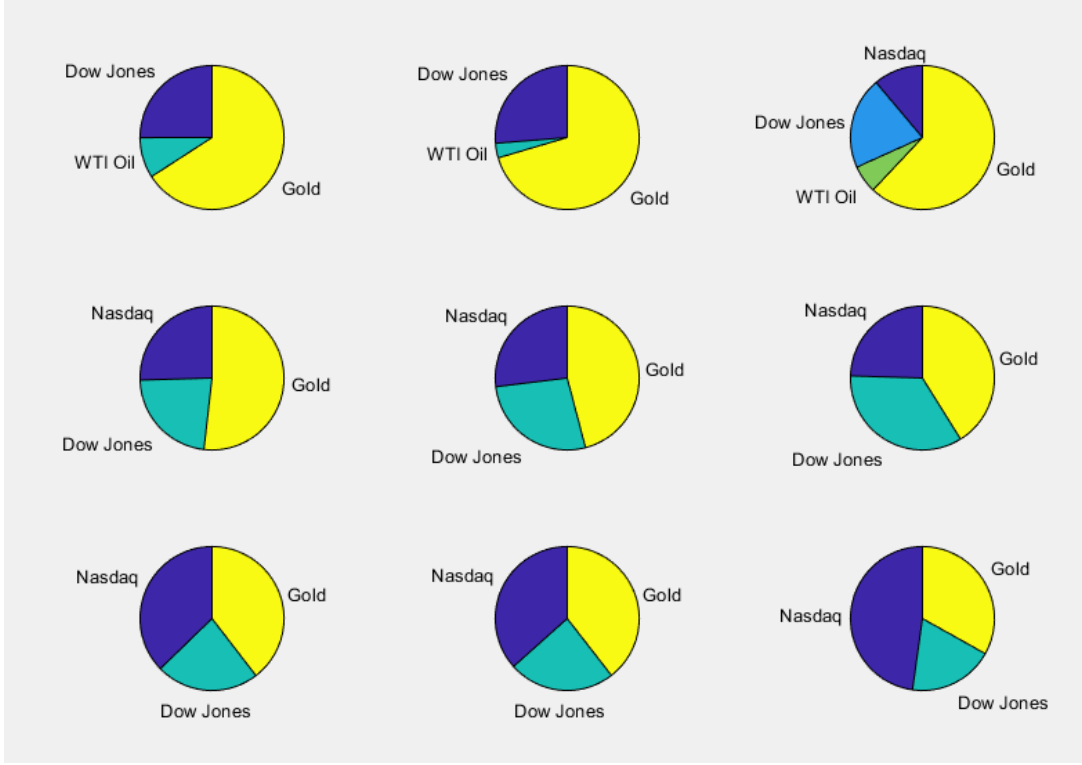


Figura 5.14: Gráfico de sectores.

Hasta ahora hemos analizado la variación en el comportamiento de las soluciones frente a la variación del parámetro penalti  $\alpha$  y a la presencia o no de restricciones de cota. Procedemos ahora a estudiar las variaciones de las soluciones en relación a perturbaciones en los datos. En varios artículos se dice que el problema de optimización Media-Varianza es sensible a perturbaciones de sus parámetros, especialmente de los rendimientos estimados. Sin embargo, tras varios estudios no se ha podido comprobar que la mejora en las técnicas de estimación de los parámetros reduzca dicha sensibilidad en las soluciones (ver [5]). Otras opiniones señalan que esta sensibilidad proviene del pobre condicionamiento del problema. A continuación haremos una breve exposición de esta cuestión usando una formulación simplificada del problema.

Consideremos el problema  $(P_{MV})$  sin la restricción de cota. Si escribimos las condiciones de optimalidad de primer orden para  $(P_{MV})$  tenemos que si  $\bar{x} \in X$  es solución, entonces  $\exists \bar{\lambda} \in \mathbb{R}$  tal que

$$V\bar{x} - r + \bar{\lambda}e = 0$$

$$e^T \bar{x} = 1$$

que en forma matricial se puede expresar como un sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} V & e \\ e^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Notemos que si  $V$  es definida positiva, la matriz de coeficientes del sistema anterior es inversible. En efecto, si planteamos el sistema homogéneo:

$$\begin{cases} Vd_1 + ed_2 = 0 \\ e^T d_1 = 0 \end{cases}$$

para  $d_1 \in \mathbb{R}^n$  y  $d_2 \in \mathbb{R}^n$ , tenemos que, multiplicando a la primera igualdad por  $d_1^T$  y usando la segunda, se obtiene que  $d_1^T V d_1 = 0$ , de donde haciendo de que  $V$  es definida positiva se obtiene que  $d_1 = 0$  y entonces, de la primera igualdad del sistema homogéneo, se deduce que  $d_2 = 0$ .

Si  $A$  es la matriz del sistema anterior y consideramos el sistema de ecuaciones lineales asociado a la matriz de coeficientes  $A + \delta A$ , siendo  $\delta A \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$  una matriz de perturbación. Hemos visto en la asignatura de Cálculo Numérico II que una cota superior sobre el error relativo en la solución del sistema viene dada por

$$\text{cond}(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \quad (5.2)$$

donde  $\text{cond}(A)$  indica el condicionamiento de la matriz  $A$  en la norma correspondiente y el cociente mide el error relativo en la matriz del sistema. Esa cota se alcanza en algunos casos. Por tanto, aunque el error relativo de la matriz  $A$  sea pequeño, si el condicionamiento es alto, el error relativo de la solución puede ser considerablemente mayor que el de la matriz  $A$ .

Para los 108 problemas generados con datos3 al aplicar la técnica de la ventana deslizante, hemos considerado las matrices correspondientes a (5.1) y con Matlab hemos calculado su condicionamiento. Hemos obtenido una media de condicionamiento de  $7,5777 \cdot 10^4$ , siendo el valor mínimo  $3,7873 \cdot 10^4$  y el máximo  $1,0083 \cdot 10^5$ . Estos valores pueden ser grandes y provocar inestabilidad de la solución. Supongamos por ejemplo que hay un error relativo de 1 por ciento en una de las matrices  $A_i$  y que su condicionamiento es justamente el valor más bajo de los posibles, es decir,  $\text{cond}(A) = 3,7873 \cdot 10^4$ . Entonces, el error relativo en la solución puede ser tan alto como  $3,7873 \cdot 10^4 \cdot 0,01 = 378,73$ . Vamos ahora mostrar los resultados numéricos obtenidos ante perturbaciones impuestas al vector de los rendimientos estimados.

Consideremos una primera perturbación en el vector de rendimientos estimados para los índices Gold y WTI Oil consistente en disminuir, en cada una de las ventanas temporales, un 10 % los rendimientos correspondientes al índice Gold y aumentar un 10 % los del WTI Oil. Veamos qué soluciones obtenemos ahora al resolver el problema ( $P_{MV}$ ) con estos nuevos rendimientos (y considerando  $\alpha = 1$ ) para así compararlo con las soluciones obtenidas sin variación en los rendimientos estimados, es decir, las soluciones que aparecen en la figura 5.12.

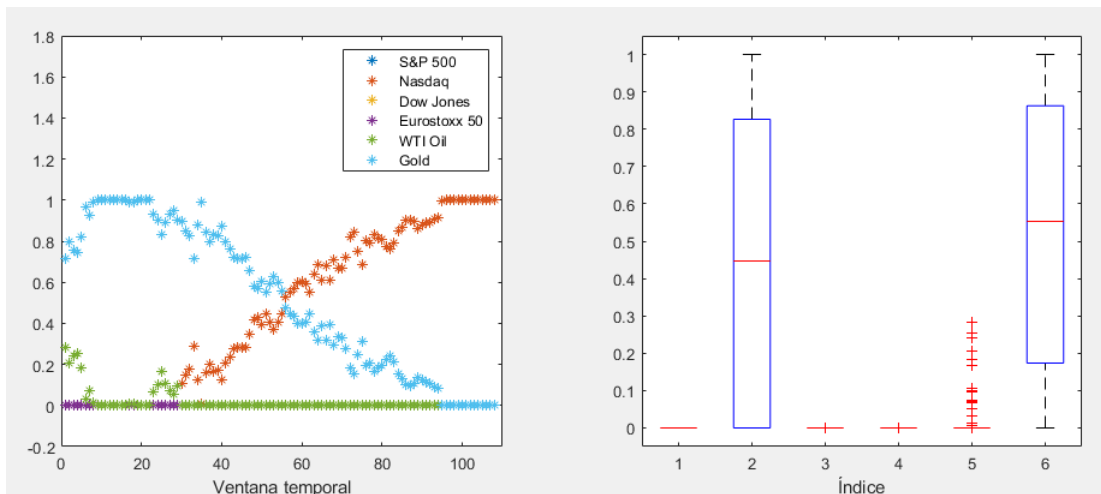


Figura 5.15: Soluciones de  $(P_{MV})$  perturbando el vector de rendimientos estimados.

En la figura 5.15 presentamos las 108 soluciones, una por cada problema perturbado. A la izquierda tenemos la composición de las carteras solución a lo largo de la ventana temporal y a la derecha el correspondiente boxplot.

Comparando las figuras 5.12 y 5.15, apreciamos cambios significantes. Estas pequeñas variaciones del 10 % en los datos (rendimientos) de esos dos activos ha provocado que en ventanas temporales donde el índice WTI Oil no se consideraba como parte de la inversión, ahora parte del capital a invertir se destina a ese índice (esto ocurre entre las ventanas 23 y 29, siendo el valor más alto el de la ventana 25 que es de un 16,79 %). Además, encontramos ventanas temporales donde la proporción a invertir en el activo Nasdaq (después de la perturbación) es de un 28,54 % cuando antes correspondía a un 16,15 % lo cual supone un aumento de un 76,72 %.

En la figura 5.16, mostramos otro ejemplo de como varían las soluciones al aumentar ahora un 15 % los rendimientos estimados del índice Gold y reducir en un 15 % los del Nasdaq. Comparando las figuras 5.12 y 5.16, vemos diferencias como un desplazamiento del punto de corte hacia la derecha. Esto implica, por ejemplo, que en la ventana temporal número 50 la proporción de capital a invertir en el activo Nasdaq era de un 29,60 % antes de la variación y tras ella es ahora de un 3 %, lo cual supone una disminución de un 89,86 %. Otro cambio significativo lo encontramos en la ventana temporal 89 donde antes de realizar la perturbación el porcentaje a invertir en el índice Gold era de un 19,64 % y después es de un 41,81 % suponiendo un aumento del 112,88 %.



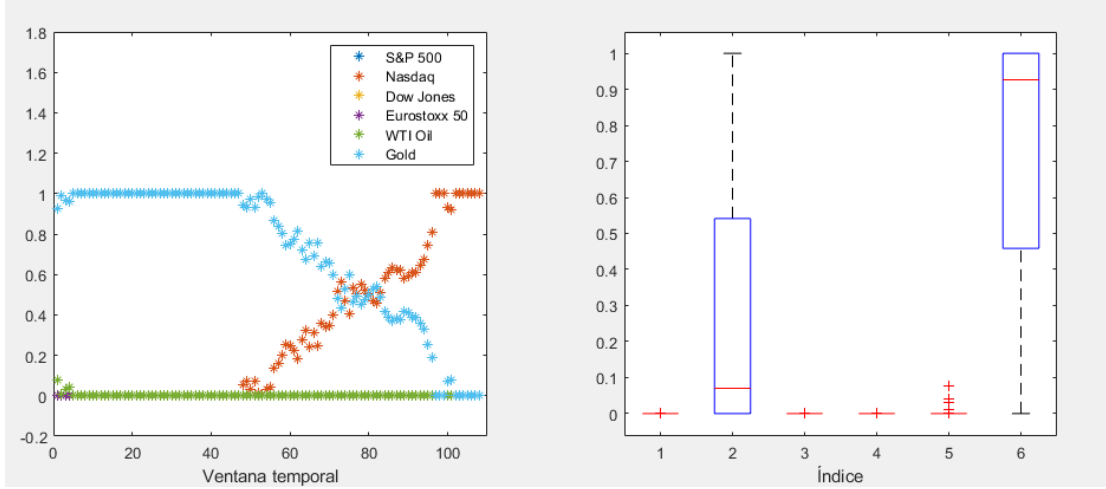


Figura 5.16: Soluciones de  $(P_{MV})$  perturbando el vector de rendimientos estimados.

Estos resultados numéricos apoyan la teoría sobre la sensibilidad en las soluciones del modelo de Markowitz que detallamos antes, donde variaciones del 10 % y del 15 % en los rendimientos estimados provocan variaciones superiores al 75 % y al 89 %, respectivamente, en las soluciones.

### 5.5.2. Evaluando las estimaciones

El objetivo de este apartado es evaluar la sensibilidad de las carteras solución, en cuanto al riesgo y el rendimiento asociado, frente a una variación en la horquilla de la ventana temporal. Para ello, compararemos los resultados asociados a las soluciones que hemos obtenido hasta ahora, con las ventanas temporales con una horquilla de 120 meses, con los resultados de aumentar cada ventana en un mes. En ambos casos hemos trabajado con el estimateFrontier y el problema multicriterio  $(P_c)$ .

Usamos las siguientes fórmulas para medir las diferencias entre ambas estrategias:

$$D_R = \frac{\sqrt{\sum_{c=1}^{nc} (f_1(\bar{x}^c) - f_1(\hat{x}^c))^2}}{nc} \quad (5.3)$$

$$D_{\sigma^2} = \frac{\sqrt{\sum_{c=1}^{nc} (f_2(\bar{x}^c) - f_2(\hat{x}^c))^2}}{nc} \quad (5.4)$$

donde  $nc$  es el número de carteras en el frente de Pareto (en nuestros experimentos 20), el subíndice  $c$  especifica la cartera,  $\bar{x}^c$  denota a cada solución antes de añadir el mes extra y  $\hat{x}^c$  es la correspondiente al añadir el mes extra. Recordemos que la función  $f_1$  está asociado al rendimiento y  $f_2$  al riesgo.

Se han aplicado esas fórmulas en cada una de las 108 ventanas temporales y con los resultados obtenidos se ha elaborado la tabla 5.4 donde se muestra la media, mediana, varianza, valor máximo y valor mínimo tanto para los rendimientos (en la primera

fila) como para los riesgos (segunda fila).

	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo
$D_R$	$5,6447 \cdot 10^{-5}$	$4,7186 \cdot 10^{-5}$	$1,8606 \cdot 10^{-9}$	$2,2733 \cdot 10^{-4}$	$2,5075 \cdot 10^{-6}$
$D_{\sigma^2}$	$1,4763 \cdot 10^{-5}$	$3,6629 \cdot 10^{-6}$	$2,9499 \cdot 10^{-9}$	$4,0249 \cdot 10^{-4}$	$4,3690 \cdot 10^{-7}$

Tabla 5.4: Estadísticas evaluando las estimaciones.

Como se puede observar, se obtienen valores muy pequeños lo cual es un buen indicador de las estimaciones realizadas.

### 5.5.3. Experimentos con la solución trivial

Presentamos aquí esta sección en relación a la importancia que dijimos que le daba Harry Markowitz a la diversificación a la hora de construir carteras de inversión y motivados por la lectura del artículo [3].

La diversificación es una estrategia para reducir el riesgo de la cartera de inversión mediante la inversión en distintos activos. Tiene como objetivo mejorar la rentabilidad en relación al riesgo, evitando situaciones adversas en nuestra cartera al invertir en varios activos que se comporten de forma distinta ante futuros escenarios.

A raíz de la importancia de la diversificación en las carteras de inversión, es interesante comparar las soluciones obtenidas al resolver el problema multiobjetivo ( $P_c$ ) para datos3 con la solución  $(1/6, \dots, 1/6) \in \mathbb{R}^6$ , es decir, la cartera de inversión donde el porcentaje de capital a invertir en cada índice es igual para todos (la llamaremos **cartera trivial o solución trivial**).

Para ello, calculamos con Matlab, para cada frontera de Pareto de cada una de las ventanas temporales, la cartera de inversión cuyo rendimiento estimado sea el máximo y también la cartera de inversión cuyo rendimiento sea el mínimo. Del mismo modo obtenemos las dos carteras con riesgo máximo y mínimo. Una vez obtenidas esas cuatro carteras, realizamos cuatro gráficas que aparecen en la figura 5.17 donde se refleja:

- 1ª gráfica: comparación del rendimiento estimado, para cada ventana temporal, entre la cartera de rendimiento estimado máximo (azul) y la cartera trivial (rojo).
- 2ª gráfica: comparación del rendimiento, para cada ventana temporal, entre la cartera de rendimiento estimado mínimo (azul) y la cartera trivial (rojo).
- 3ª gráfica: comparación del riesgo, para cada ventana temporal, entre la cartera de riesgo máximo (azul) y la cartera trivial (rojo).
- 4ª gráfica: comparación del riesgo, para cada ventana temporal, entre la cartera de riesgo mínimo (azul) y la cartera trivial (rojo).

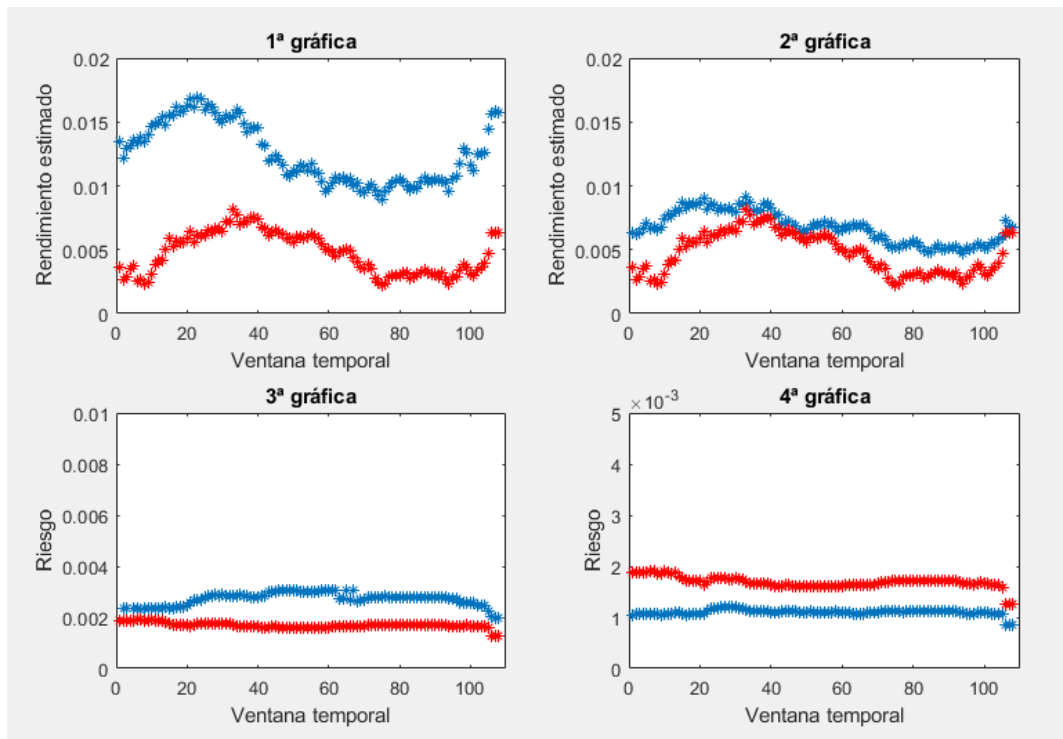


Figura 5.17: Comparaciones con la cartera trivial.

A la vista de las gráficas, la cartera trivial no parece que resulte ser una opción muy buena si se usa una herramienta de optimización como el `estimateFrontier` puesto que a lo largo de todas las ventanas temporales, el rendimiento estimado para la cartera trivial no supera el rendimiento estimado de la cartera eficiente de menor rendimiento (ver segunda gráfica) y, además, con la cartera trivial, asumiríamos también un mayor riesgo (ver cuarta gráfica).

Los motivos por los que se considera la cartera trivial como cartera de inversión se basan en proporcionar diversificación con una fácil implementación ya que no depende de ninguna estimación de rendimientos. A día de hoy, algunos inversores profesionales siguen utilizando esta distribución del capital como posible inversión.



## Capítulo 6

# La dificultad del problema de inversión en carteras

Me gustaría comentar, aquí a modo de conclusión, las dificultades que se presentan al resolver el problema de optimización en carteras.

El problema Media-Varianza ha sido muy estudiado académicamente desde que fue introducido en 1952 hasta nuestros días (ver [6]). Sin embargo, en el mundo de las finanzas ese modelo no se ha introducido tan rápido como se esperaba en un principio. Esta controversia viene originada por la sensibilidad de las soluciones frente a perturbaciones en los datos, como hemos visto en nuestros experimentos numéricos, comportamiento que no es deseable para el inversor.

En los últimos años se han realizado estudios que se basan en intentar mejorar las técnicas de estimación de los vectores de rendimientos y de la matriz de covarianzas. En consecuencia, hoy en día se está optando por mejorar las estimaciones de la matriz como vía para reducir los errores de estimaciones. Estos errores de estimación también están sujetos a las expectativas de los movimientos del mercado, que es lo que verdaderamente dificulta el cálculo de las estimaciones.

A pesar de estos inconvenientes, inversores profesionales siguen considerando el problema Media-Varianza como método consistente para realizar inversiones en carteras.



## Capítulo 7

### Anexo

**Teorema 7.0.1** (Regla de los Multiplicadores de Lagrange). *Sea el problema*

$$(P) \begin{cases} \text{Min} & f(x) \\ \text{sujeto a} & g_j(x) \leq 0, \quad \forall j = 1, \dots, k \end{cases} \quad (7.1)$$

donde las funciones  $f, g_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  son de clase  $C^1$ .

Si  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  es una solución del problema (P), entonces existen  $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}$ ,  $\bar{\alpha} \geq 0$ , y  $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^k$ ,  $\bar{\lambda} \geq 0$ , tales que

$$\bar{\alpha} + \sum_{j=1}^k \bar{\lambda}_j > 0,$$

$$\bar{\alpha} \nabla f(\bar{x}) + \sum_{j=1}^k \bar{\lambda}_j \nabla g_j(\bar{x}) = 0,$$

$$\bar{\lambda}_j \geq 0 \quad \text{y} \quad \bar{\lambda}_j g_j(\bar{x}) = 0, \quad 1 \leq j \leq k,$$

$$g_j(\bar{x}) \leq 0, \quad 1 \leq j \leq k.$$

**Teorema 7.0.2** (Condiciones de optimalidad suficientes de primer orden). *Sea  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  y consideremos el problema (P) del teorema anterior, donde ahora las funciones son además convexas. Entonces, si existen  $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^k$ ,  $\bar{\lambda} \geq 0$ , tales que*

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{j=1}^k \bar{\lambda}_j \nabla g_j(\bar{x}) = 0 \quad (7.2)$$

$$\bar{\lambda}_j g_j(\bar{x}) = 0, \quad \forall j = 1, \dots, k, \quad (7.3)$$

se tiene que  $\bar{x}$  es un mínimo global del problema (P).

## 7.1. Glosario

**Notación:** Dado  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x > 0$  indica que cada una de las coordenadas del vector  $x$  es estrictamente mayor que cero. Del mismo modo,  $x \geq 0$  significa que  $x_i \geq 0$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ .

**Notación:**  $e \in \mathbb{R}^n$  denota al vector cuyas componentes son todas iguales a uno.

**Definición 7.1.1** (Conjunto de puntos admisibles). *Dado un problema de optimización  $(\hat{P})$*

$$(\hat{P}) \begin{cases} \text{Min} & \hat{f}(x) \\ \text{sujeto a} & x \in \Omega, \end{cases}$$

*a  $\Omega$  se le llama conjunto de puntos admisibles del problema  $\hat{P}$  y lo denotaremos por  $A(\hat{P})$ .*

**Definición 7.1.2** (Restricciones activas en un punto). *Una restricción de desigualdad,  $g(x) \leq 0$ , se dice que es activa en  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  si dicha restricción se satura en  $\hat{x}$ , esto es,  $g(\hat{x}) = 0$ .*

**Definición 7.1.3** (Boxplot). *Un boxplot o diagrama de caja es un método para poder representar gráficamente una serie de datos numéricos a través de sus cuartiles. El boxplot muestra a simple vista la mediana y los cuartiles de los datos, así como los valores atípicos. Así, la línea roja de dentro de la caja representa la mediana, la “tapa” superior de la caja el tercer cuartil y la tapa inferior representa el primer cuartil. Los dos segmentos más cortos que no pertenecen a la caja delimitan la variabilidad de los datos de la muestra.*

**Definición 7.1.4** (Activo financiero). *Un activo financiero es un instrumento emitido, bien por los demandantes de fondos, o bien por los intermediarios financieros, con objeto de movilizar el ahorro hacia una inversión productiva.*

**Definición 7.1.5** (Índices bursátiles). *Los índices bursátiles muestran la evolución y comportamiento del mercado, permitiendo así realizar comparaciones entre los diversos mercados. Para ello van reflejando las variaciones producidas en el valor de las empresas que cotizan. Para su elaboración, se tiene en cuenta la capitalización bursátil de las compañías en el mercado, que fija la importancia de cada empresa en el índice, de modo que se le da más peso a las empresas de mayor valor. Los índices bursátiles se denominan en “puntos”, cuya evolución nos muestra su comportamiento.*



# Bibliografía

- [1] J. E. Beasley. OR-library: Distributing test problems by electronic mail. *Journal of the Operational Research Society*, 41:1069–1072, 1990.
- [2] D.P. Bertsekas. *Nonlinear Programming*. Athena Scientific, 1999.
- [3] V. DeMiguel, L. Garlappi, and R. Uppal. Optimal versus naive diversification: How inefficient is the  $1/n$  portfolio strategy? *The Review of Financial Studies*, 22:1916–1921, 2009.
- [4] V. DeMiguel and F. J. Nogales. Portfolio selection with robust estimation. *Operations Research*, 57:560–577, 2009.
- [5] W. J. Hurley and J. Brimberg. A note on the sensitivity of the strategic asset allocation problem. *Operations Research Perspectives*, 2:133–136, 2015.
- [6] P. N. Kolm, R. Tütüncü, and F. J. Fabozzi. 60 years of portfolio optimization: Practical challenges and current trends. *European Journal of Operational Research*, 234:356–371, 2014.
- [7] H. Markowitz. Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7, 1952.
- [8] K. M. Miettinen. *Nonlinear Multiobjective Optimization*, volume 12 of *International Series in Operations Research & Management Science*. Kluwer Academic Publishers, Boston, USA, 1998.
- [9] J. Pindado. *Finanzas Empresariales*. Paraninfo, 2012.
- [10] R. E. Wendell and D. N. Lee. Efficiency in multiple objective problems. *Mathematical Programming*, 1:406–414, 1977.